

# COURS DE PHYSIQUE

## *MÉCANIQUE DES FLUIDES*


JIMMY ROUSSEL

2025

Cours de mécanique des fluides – [femto-physique.fr](http://femto-physique.fr)

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2025 Jimmy Roussel

 Ce document est sous licence *Creative Commons* «Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International (CC BY-NC 4.0)».

Pour plus d'informations : [creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Ce document est réalisé avec l'aide de *KOMA-Script* et  $\text{\LaTeX}$  en utilisant la classe *kaobook*.

1<sup>re</sup> édition – Janv. 2010

Version en ligne – [femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides)

# Preface

Ce cours de mécanique des fluides est avant tout destiné à l'étudiant désirant maîtriser les bases de la mécanique des fluides. Il est normalement accessible à un étudiant en fin de parcours de Licence (L2-L3).

Ce cours couvre les aspects essentiels de la mécanique des fluides : notion de pression, tension superficielle, écoulements parfaits, écoulements visqueux, notion de pertes de charges etc. En revanche la notion de turbulence n'est pas abordée.

J'ai essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des exemples ou de simples exercices. Mais pour un entraînement plus poussé, j'invite le lecteur à se procurer les eBooks suivants :

- *Statique des fluides - Pression et tension de surface – 45 exercices et problèmes corrigés.*
- *Dynamique des fluides - Fluides parfaits et newtoniens – 50 exercices et problèmes corrigés.*

disponibles à l'adresse [payhip.com/femto](http://payhip.com/femto)

*Jimmy Roussel*



# Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
<b>I STATIQUE DES FLUIDES</b>	<b>1</b>
<b>1 PRESSION DANS UN FLUIDE</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 La pression	4
1.3 Fluide au repos dans le champ de pesanteur	7
1.4 Généralisation	10
<b>2 TENSION DE SURFACE</b>	<b>15</b>
2.1 Énergie de surface	15
2.2 Forces capillaires	17
2.3 Mouillage	22
2.4 Approche thermodynamique	23
<b>II DYNAMIQUE DES FLUIDES</b>	<b>27</b>
<b>3 FLUIDE EN ÉCOULEMENT</b>	<b>29</b>
3.1 Description d'un fluide en écoulement	29
3.2 Conservation de la masse	33
3.3 Écoulement incompressible	35
<b>4 DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS</b>	<b>39</b>
4.1 Équations dynamiques	39
4.2 Écoulements incompressibles stationnaires	40
4.3 Écoulements potentiels	45
<b>5 FLUIDES VISQUEUX</b>	<b>49</b>
5.1 Notion de viscosité	49
5.2 Dynamique des écoulements visqueux incompressibles	51
<b>6 PERTES DE CHARGE ET FRICTION</b>	<b>55</b>
6.1 Pertes de charge dans une conduite	55
6.2 Résistance au mouvement dans les fluides	63
<b>ANNEXES</b>	<b>67</b>
<b>A THÉORÈME DE LA DIVERGENCE</b>	<b>69</b>
<b>B ACCÉLÉRATION D'UNE PARTICULE DE FLUIDE</b>	<b>71</b>
<b>C THÉORÈME <math>\pi</math></b>	<b>73</b>
C.1 Énoncé	73

C.2 Applications en mécanique des fluides . . . . .	73
Pour en savoir plus	77
Grandeurs physiques et symboles mathématiques	79

# Table des figures

1.1	Les trois échelles. . . . .	3
1.2	Pression cinétique. . . . .	4
1.3	Le rapport $dF/dS$ fluctue autour d'une valeur moyenne appelée pression. Les fluctuations sont imperceptibles à l'échelle mésoscopique. . . . .	4
1.4	Particule de fluide soumise aux forces pressantes du fluide l'entourant dans le cas où la pression ne dépend que de $x$ . . . . .	6
1.5	Résultante des forces de pression sur une surface fermée. . . . .	7
1.6	À gauche : manomètre à liquide. À droite : expérience de Torricelli (1644). . . . .	9
1.7	Nivellement barométrique . . . . .	10
1.8	Évolution de la surface libre en cas d'accélération horizontale. . . . .	11
1.9	Cylindre en rotation. . . . .	12
1.10	Calcul de la poussée d'Archimède sur un cube. . . . .	13
1.11	Cas d'un volume quelconque. . . . .	13
2.1	Interactions au sein d'un fluide. . . . .	15
2.3	Production de particules dans la première chambre à bulles . . . . .	16
2.2	Coalescence de deux gouttes (©CNRS) . . . . .	16
2.4	Mise en évidence des forces capillaires. . . . .	17
2.5	Densité linéique de forces superficielles. . . . .	17
2.6	Stalagmométrie. . . . .	18
2.7	Méthode de l'anneau. . . . .	19
2.8	La résultante des forces capillaires qu'exerce la membrane sur un contour fermé est nulle si la membrane est plane. . . . .	20
2.9	À gauche : existence d'une surpression dans une goutte. La courbure entraîne l'existence d'une résultante des forces capillaires dirigée vers le centre de courbure. À droite : forces agissantes sur une portion hémisphérique d'une goutte liquide. Les flèches réparties sur le contour circulaire représentent les forces capillaires. . . . .	20
2.10	Lame de savon formant une caténoïde . . . . .	21
2.11	Définition de l'angle de contact. . . . .	22
2.12	Différents équilibres d'un liquide au contact d'un substrat solide. . . . .	22
2.13	Expérience et schéma. . . . .	23
2.14	Bulle de savon enfermant de l'air à la pression $p$ . . . . .	24
3.1	Notion de trajectoire. . . . .	29
3.2	Notion de ligne d'écoulement. Notez que toutes les vitesses représentées concernent le même instant. . . . .	29
3.3	Visualisation des tourbillons derrière un obstacle plan. . . . .	32
3.4	À gauche : lignes d'émission autour d'un corps fuselé à l'aide de la machine à fumées d'Etienne Marey. À droite : ondes de choc lors d'un vol supersonique visualisées par strioscopie. . . . .	33
3.5	Calcul du débit massique. . . . .	33
3.6	Calcul du débit massique sortant d'une surface fermée. . . . .	34
3.7	Particule de fluide dans un écoulement uniforme . . . . .	36
3.8	Particule de fluide dans un écoulement radial, capturé à différents instants. . . . .	36
3.9	Tube de courant. . . . .	37

4.1	Daniel Bernoulli (1700 - 1782) : médecin, physicien et mathématicien suisse. Il publia en 1738 son ouvrage <i>Hydrodynamica</i> dans lequel il expose le théorème fondamental de la mécanique des fluides qui porte son nom. . . . .	40
4.2	Effet venturi . . . . .	43
4.3	Vidange d'un récipient. . . . .	43
4.4	Sonde de Pitot statique dite aussi sonde de Prandtl. . . . .	44
4.5	Principe de la sonde de Pitot statique. . . . .	45
4.6	Exemple d'écoulement potentiel . . . . .	47
5.1	Rhéomètre de Couette. À gauche, vue de profil. À droite, vue de dessus. . . . .	49
5.2	Contraintes internes dans le fluide. . . . .	51
5.3	Différents comportements rhéologiques. . . . .	51
5.4	Bilan des forces de viscosité sur un élément de fluide. . . . .	52
6.1	Écoulement de Poiseuille. Position du problème. . . . .	56
6.2	Profil de vitesse. . . . .	57
6.3	Diagramme de Moody permettant de lire $\lambda(R_e, \varepsilon/d)$ . . . . .	60
6.4	Coefficients de perte de charge singulière sur quelques géométries. . . . .	61
6.5	Écoulement stationnaire dans un système de conduites. . . . .	62
6.6	Traînée sur un obstacle sphérique immobile. . . . .	63
6.7	Portance et traînée. . . . .	64
6.8	Quelques $C_x$ pour différents profils dans un écoulement turbulent avec $R_e \approx 10^5$ . . . . .	65
6.9	Évolution du $C_x$ d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds. . . . .	65
A.1	Calcul du flux à travers un cube. . . . .	69
A.2	Flux à travers deux cubes adjacents . . . . .	70
C.1	Traînée sur un obstacle sphérique immobile. . . . .	73
C.2	Convection dans un échangeur cylindrique. . . . .	75

## Liste des tableaux

1.1	Autres unités de pression couramment utilisées. . . . .	5
1.2	Eau liquide à 25°C, 1 atm. . . . .	8
1.3	Vapeur d'eau à 100°C, 1 atm. . . . .	9
5.1	Quelques valeurs de viscosité. . . . .	50
5.2	Quelques ordres de grandeur du nombre de Reynolds. . . . .	54

**Première partie**

**STATIQUE DES FLUIDES**



Dans ce cours, on s'intéresse au champ de pression au sein d'un fluide, notamment lorsqu'il est au repos dans un champ de force extérieure.

Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/pression.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/pression.php)

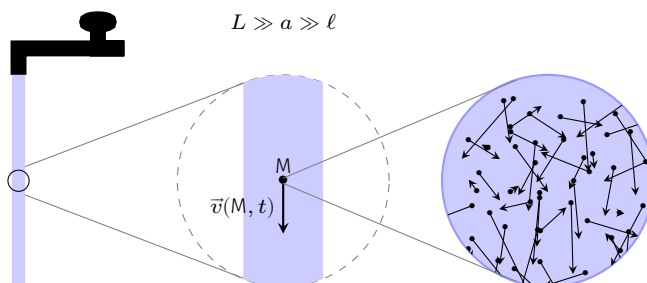
## 1.1 Introduction

Le terme fluide désigne un *comportement* qui s'oppose au comportement élastique ou plastique associé aux solides. Par définition, on dit que **la matière est fluide lorsqu'elle se déforme aussi longtemps que lui sont appliquées des contraintes tangentielles**. En termes simples on peut dire qu'un fluide coule quand un solide se déforme.

Fondamentalement, le comportement fluide est lié, au niveau moléculaire, à l'**absence d'ordre à longue portée** (contrairement aux cristaux<sup>1</sup>) et à l'existence d'un **chaos moléculaire** (contrairement aux solides). Ces propriétés se retrouvent notamment chez les gaz et les liquides.

Plusieurs approches sont possibles pour décrire un fluide :

- **L'approche « Dynamique Moléculaire »** consiste à simuler le mouvement moléculaire en résolvant de façon numérique les équations mécaniques appliquées à un grand nombre de molécules.
- **L'approche « milieu continu »** est une description à une échelle où les grandeurs thermodynamiques ont un sens.
- **L'approche statistique** traite la dynamique moléculaire en adoptant un point de vue statistique.



1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 La pression . . . . .	4
Origine de la pression . . . . .	4
Unités . . . . .	5
Résultante des forces pressantes . . . . .	5
Conséquences . . . . .	7
1.3 Fluide au repos dans le champ de pesanteur . . . . .	7
Cas des Liquides . . . . .	7
Cas des gaz . . . . .	9
1.4 Généralisation . . . . .	10
Équation fondamentale de la statique . . . . .	10
Liquide en translation accélérée . . . . .	11
Liquide en rotation . . . . .	12
Poussée d'Archimède . . . . .	12

1 : Certains systèmes présentent un ordre à longue portée suivant une seule direction. Ils ont alors un caractère cristallin selon cette direction et fluide selon les autres. On les désigne par le terme *cristaux liquides*.

La mécanique des fluides repose sur la deuxième approche. En effet, dans les situations courantes on peut, en général, distinguer trois échelles :

1. L'échelle macroscopique  $L$ . Par exemple, le diamètre d'un tuyau d'arrosage caractérise l'échelle macroscopique d'un tel système.

FIG. 1.1 : Les trois échelles.

2. L'échelle des collisions  $\ell \ll L$ . Généralement on choisit le libre parcours moyen, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives. À cette échelle, les grandeurs varient de façon discontinue et imprévisible.
3. L'échelle mésoscopique  $a$  telle que  $\ell \ll a \ll L$ . À cette échelle, **les fluctuations sont lissées** de sorte que l'on peut définir des grandeurs locales continues.

**Particule de fluide** – On choisit alors comme échelle d'observation, l'échelle mésoscopique. On considère, autour d'un point  $M$ , un volume mésoscopique  $\delta\tau$ . Typiquement un volume de  $1 \mu\text{m}^3$  convient. Ce volume contient un grand nombre de particules ce qui permet de définir des *grandeurs moyennes locales* qui, elles, vont évoluer de façon continue : la masse volumique locale  $\rho(M, t)$ , la vitesse locale  $\vec{v}(M, t)$ ...

## 1.2 La pression

### Origine de la pression

Le chaos moléculaire qui règne au sein d'un fluide est à l'origine de la **pression cinétique**. Les collisions sur un élément de surface mésoscopique ou macroscopique produisent une force moyenne qui présente les propriétés suivantes :

- cette force est orthogonale à l'élément de surface;
- son intensité est proportionnelle à l'aire de l'élément de surface.

Si l'on note  $dF$  l'intensité de la force et  $dS$  l'aire de l'élément de surface, on a

$$dF = p_c dS$$

où  $p_c$  désigne la **pression cinétique**<sup>2</sup>.

L'interaction intermoléculaire est aussi responsable d'une **pression moléculaire**  $p_m$ . Les interactions entre molécules peuvent amplifier ( $p_m > 0$ ) ou diminuer ( $p_m < 0$ ) cette pression cinétique. Les collisions inter-moléculaires l'augmentent alors que les interactions attractives de van der Waals la diminuent.

En résumé, dans un fluide tout élément de surface subit des forces pressantes qui s'écrivent

$$d\vec{F} = p dS \vec{n} \quad \text{avec} \quad p = p_c + p_m \quad \heartsuit \quad (1.1)$$

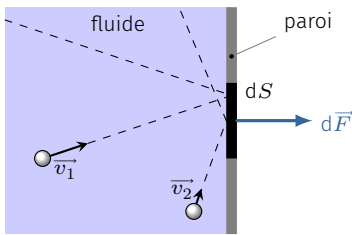


FIG. 1.2 : Pression cinétique.

2: On montre en théorie cinétique des gaz que

$$p_c = \frac{1}{3} n^* m \langle v^2 \rangle$$

où  $n^*$  est la densité moléculaire (molécules par  $\text{m}^3$ ),  $m$  la masse d'une molécule et  $\langle v^2 \rangle$  le carré moyen de la vitesse des particules.

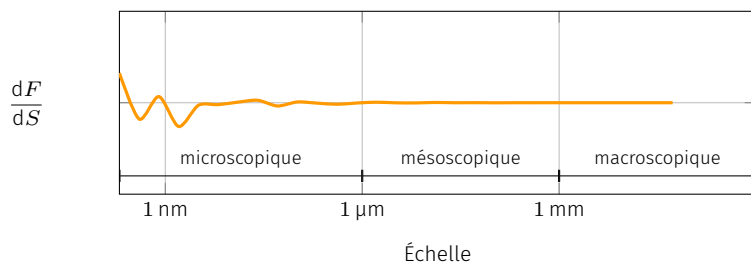


FIG. 1.3 : Le rapport  $dF/dS$  fluctue autour d'une valeur moyenne appelée pression. Les fluctuations sont imperceptibles à l'échelle mésoscopique.

$p$  désigne la pression qui règne au point où se trouve l'élément de surface. La pression est donc un **champ scalaire** que nous noterons  $p(M)$  avec  $M$  un « point mésoscopique » du fluide.

- Dans les gaz, la pression d'origine cinétique est prépondérante ( $p_m \ll p_c$ ).
- Dans le cas limite où l'on néglige l'interaction moléculaire, on obtient un **gaz parfait** pour lequel

$$p_{\text{GP}} = p_c = \frac{nRT}{V} \quad \heartsuit \quad (1.2)$$

- Dans les liquides, les pressions moléculaire et cinétique sont du même ordre de grandeur (en valeur absolue) de sorte qu'en général  $p = p_c + p_m \ll p_c$  avec  $p_m < 0$ . On peut même rencontrer des états liquides à pression négative, mais ces états sont métastables.

## Unités

Dans le Système international d'unités, la pression s'exprime en **pascal** (symbole Pa), en hommage à Blaise Pascal<sup>3</sup>.

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \heartsuit \quad (1.3)$$

Il existe également d'autres unités encore très utilisées (TAB. 1.1).

Unités	Équivalence en pascal
1 bar	$10^5 \text{ Pa}$
1 atmosphère	$1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
1 torr = 1 mm Hg	133,3 Pa
Pressions rencontrées dans la Nature	
Centre du Soleil	$10^{16} \text{ Pa}$
Centre de la Terre	$10^{11} \text{ Pa}$
Record Haute pression en labo	$1,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
Abysses des océans	$10^8 \text{ Pa}$
Talons aiguilles	$10^7 \text{ Pa}$
Atmosphère de la terre	$10^5 \text{ Pa}$
Trompe à eau	$10^3 \text{ Pa}$
Ultra vide en labo	$10^{-12} \text{ Pa}$

**Exercice** – À quelle masse répartie sur  $1 \text{ cm}^2$  correspond 1 bar si l'on prend  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ?

Solution : 1 kg.

## Résultante des forces pressantes

Comme on vient de le voir, les forces pressantes sont des actions de contact (interactions de courte portée) qui agissent sur des surfaces. Si l'on considère une particule de fluide, son environnement produit à sa surface des forces pressantes dont on cherche à exprimer la **résultante**.

Dans un gaz, la température est directement reliée à l'énergie cinétique moyenne des molécules, via la relation

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

où  $k_B$  désigne la constante de Boltzmann. Il en découle

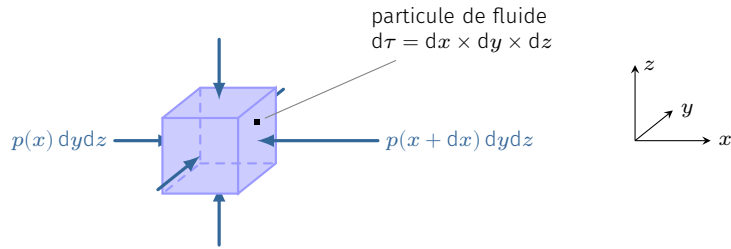
$$p_c = \frac{1}{3} \frac{n N_A}{V} m \langle v^2 \rangle = \frac{nRT}{V}$$

à condition de poser  $R = N_A k_B$ .

3 : **Blaise Pascal** (1623–1662) : Mathématicien, physicien et philosophe français. Il contribua au développement des probabilités, de la philosophie (« Les pensées ») et de l'hydraulique. Il montra, avec la collaboration de son beau frère Perrier, que l'ascension du mercure dans l'expérience de Torricelli est due à la pression atmosphérique.

**TAB. 1.1** : Autres unités de pression couramment utilisées et quelques ordres de grandeur.

FIG. 1.4 : Particule de fluide soumise aux forces pressantes du fluide l'entourant dans le cas où la pression ne dépend que de  $x$ .



Considérons pour cela une particule de fluide en forme de parallélépipède située en  $(x, y, z)$  de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . Supposons dans un premier temps que la pression varie seulement avec  $x$ . On voit alors par symétrie, que la résultante des forces est nécessairement selon  $\vec{u}_x$ . Appelons  $d\vec{F}$  cette résultante. On a

$$d\vec{F} = p(x) dydz \vec{u}_x - p(x + dx) dydz \vec{u}_x$$

$dx$  caractérisant l'échelle mésoscopique, on peut utiliser le développement de Taylor d'ordre un :

$$p(x + dx) = p(x) + dx \frac{\partial p}{\partial x}$$

On aboutit alors au résultat

$$d\vec{F} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \vec{u}_x$$

Si l'on avait considéré une pression dépendant de la variable  $y$  nous aurions obtenu une force selon  $\vec{u}_y$  faisant intervenir la dérivée partielle  $\partial p / \partial y$ , etc. Ainsi, dans le cas où la pression dépend des trois variables d'espace  $x, y, z$ , on obtient

$$d\vec{F} = - \underbrace{\left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z \right)}_{\vec{\text{grad}} p} \underbrace{dx dy dz}_{d\tau}$$

#### Résultante des forces pressantes

Une particule de fluide de volume  $d\tau$  subit de la part du fluide qui l'entoure, une force de pression totale

$$d\vec{F} = -\vec{\nabla} p(M) d\tau \quad (1.4)$$

On peut donc définir une **force volumique**<sup>4</sup> de pression (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ ) :

$$\vec{f}_p = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = -\vec{\nabla} p(M) \quad (1.5)$$

4 : Toutes les forces volumiques seront notées avec un  $f$  minuscule.

En sommant toutes ces forces sur un volume macroscopique  $V$  délimité par une surface  $S$ , on obtient la résultante des forces pressantes qui agit sur sa surface. On a donc deux moyens d'exprimer cette ré-

sultante :

$$\vec{F} = \oint_{M \in S} -p(M) dS \vec{n}^{\text{ext}} = \iiint_{M \in V} -\vec{\nabla} p(M) d\tau \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

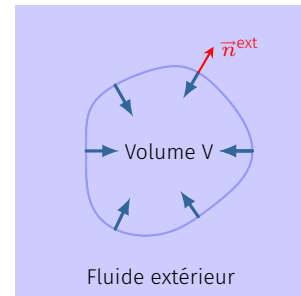


FIG. 1.5 : Résultante des forces de pression sur une surface fermée.

### Conséquences

- Comme on l'a vu, on peut définir une force volumique associée à la résultante des forces pressantes :

$$\vec{f}_p = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)$$

On constate donc que cette force volumique est une **force conservative** qui dérive d'une énergie potentielle volumique

$$e_p \quad (\text{J} \cdot \text{m}^{-3}) = p \quad (\text{Pa}) \quad \heartsuit \quad (1.7)$$

La mécanique nous enseigne alors que dans un fluide les forces de pression tendent à déplacer le fluide vers les zones de basse pression pour minimiser l'énergie potentielle de pression.

- Par ailleurs, l'une des propriétés du gradient d'une fonction  $f(x, y, z)$  est de donner un vecteur perpendiculaire à la surface de niveau définie par  $f(x, y, z) = C^{\text{te}}$ . Il en découle que les **lignes de force de pression sont orthogonales aux isobares**.
- Enfin, si la pression est uniforme on a  $\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \vec{0}$  et donc

$$\oint p dS \vec{n}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad (\text{pression uniforme}) \quad \heartsuit \quad (1.8)$$

**Exercice** – Soit un solide hémisphérique de rayon  $R$  plongé dans l'air de pression uniforme  $p_0$ . Calculer la force pressante  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la surface sphérique du solide en utilisant la propriété (1.8).

## 1.3 Fluide au repos dans le champ de pesanteur

Dans un fluide au repos par rapport à un référentiel, les forces internes se résument aux forces de pression. Voyons dans un premier temps comment le champ de pesanteur conditionne l'évolution de la pression au sein du fluide.

### Liquide dans un champ de pesanteur

**Les liquides** – Dans un liquide, les interactions intermoléculaires<sup>5</sup> jouent un rôle important. Elles sont telles que les molécules sont quasi en contact ce qui explique le caractère quasi-incompressible

<sup>5</sup> : L'interaction de van der Waals, la liaison hydrogène, l'interaction électrostatique dans une solution électrolytique etc.

de ces fluides : les liquides présentent un **volume propre**. En effet, les variations de densité avec la pression et la température restent faibles comme le montre la TAB. 1.2. On adopte alors le modèle suivant :

$$\begin{array}{l} \Delta T = 10 \text{ K} \quad \rightarrow \quad \frac{|\Delta \rho|}{\rho} = 0,2\% \\ \Delta p = 1 \text{ bar} \quad \rightarrow \quad \frac{|\Delta \rho|}{\rho} = 0,02\% \end{array}$$

TAB. 1.2 : Eau liquide à 25°C, 1 atm.

### Modèle de l'état liquide

Sauf indication contraire, on considère les liquides incompressibles et indilatables. Autrement dit

$$\rho = C^{\text{te}}$$

**Pression dans un liquide incompressible** – Considérons un liquide au repos dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ . Isolons une particule de fluide de volume  $d\tau$  et effectuons un bilan des forces :

- Pesanteur :  $d\vec{P} = \rho d\tau \vec{g}$ ;
- Pression du fluide environnant :  $d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}p d\tau$

Appliquons la seconde loi de Newton, sachant que le liquide est supposé au repos dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

$$\rho d\tau \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}p d\tau = \vec{0}$$

ce qui donne en projection sur les axes cartésiens :

Attention, l'axe ( $Oz$ ) est descendant!

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

La pression ne dépend que de  $z$  d'après les deux premières relations. En intégrant la dernière relation on aboutit à

$$p(z) = p_0 + \rho g z \quad \heartsuit \quad (1.9)$$

La pression augmente linéairement avec la profondeur. Le terme  $\rho g z$  représente la pression due au poids de la colonne de liquide qui surplombe un point à la profondeur  $z$ .

**Exercice** – De quelle profondeur faut-il s'enfoncer dans l'océan pour voir la pression augmenter de 1 bar si l'on prend  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  ?

Solution : 10,2 m.

### Conséquences –

- Les isobares sont horizontales, par conséquent la surface libre (isobare  $p = p_{\text{atm}}$ ) aussi.
- **Mesure relative de pression** à l'aide d'un manomètre à liquide en U (cf. FIG. 1.6) :

$$p_{\text{int}} - p_{\text{atm}} = \rho g h$$

- **Mesure absolue de pression** à l'aide du baromètre à mercure inventé par Evangelista Torricelli<sup>6</sup> (cf. FIG. 1.6). On a

$$p_{\text{atm}} = \rho g h \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \rightarrow h \simeq 760 \text{ mm de Hg}$$

6 : Élève de Galilée, il découvre en 1644 le principe du baromètre à mercure. Le 19 septembre 1648, le beau-frère de Blaise Pascal, Florin Périer, montre que la hauteur du mercure dans le baromètre de Torricelli ne dépend que de la pression atmosphérique. Il obtient à Clermont Ferrand (460m)  $h = 71,2 \text{ cm}$  et sur le Puy de Dôme (1464m)  $h = 62,7 \text{ cm}$  de mercure.

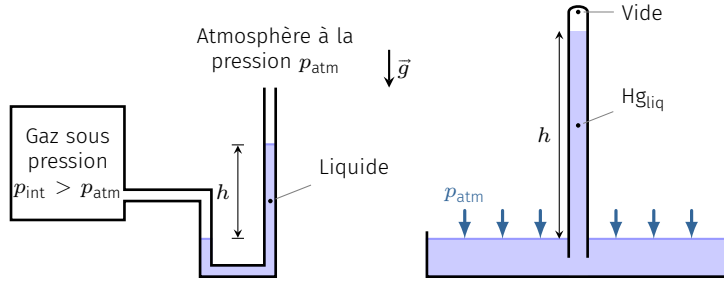


FIG. 1.6 : À gauche : manomètre à liquide. À droite : expérience de Torricelli (1644).

Avant 1954, 1 atm correspondait à une hauteur de mercure de 76 cm pris à 0°C en un lieu de champ de pesanteur standard  $g = 9,806650 \text{ m.s}^{-2}$  ce qui donnait  $p_{\text{atm}} = 1,013249 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . À l'heure actuelle on a 1 atm =  $1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$  par définition.

### Gaz dans un champ de pesanteur

**Les gaz** – Dans un gaz, les molécules interagissent peu, et leur énergie est avant tout cinétique. Les distances inter-atomiques sont grandes ce qui explique que, contrairement aux liquides, les gaz sont très compressibles. Par ailleurs, dans les conditions de pression et de température raisonnables et loin de tout point critique, le modèle du gaz parfait est tout à fait suffisant.

$\Delta T = 10 \text{ K}$	$\rightarrow$	$\frac{ \Delta \rho }{\rho} = 3\%$
$\Delta p = 1 \text{ bar}$	$\rightarrow$	$\frac{ \Delta \rho }{\rho} = 100\%$

TAB. 1.3 : Vapeur d'eau à 100°C, 1 atm.

#### Modèle de l'état gazeux

Sauf indication contraire, on considère les gaz parfaits. Par conséquent, si l'on suppose l'équilibre thermodynamique à l'échelle locale, on aura en chaque point du fluide

$$\rho(M) = \frac{m}{V} = \frac{nM_{\text{gaz}}}{V} = \frac{M_{\text{gaz}}p(M)}{RT(M)}$$

où  $M_{\text{gaz}}$  est la masse molaire du gaz et  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits.

**Pression dans une atmosphère isotherme** – Considérons un gaz isotherme ( $T = T_0$ ) en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  et procédons comme dans la section précédente. L'équilibre mécanique se traduit par la même équation :

$$\rho d\tau \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} p d\tau = \vec{0}$$

Là encore, la pression ne dépend que de  $z$ , et la projection selon l'axe vertical donne l'équation

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Ici  $\rho$  dépend de  $z$  car la pression en dépend. En utilisant l'équation d'état du gaz parfait, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dz} + \frac{M_{\text{gaz}}g}{RT_0} p = 0 \tag{1.10}$$

Attention ici on prend un axe ( $Oz$ ) ascendant!

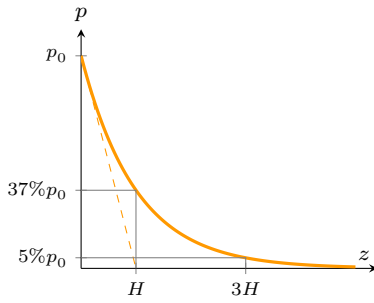


FIG. 1.7 : Nivellement barométrique : décroissance exponentielle de la pression avec l'altitude.

Cette équation différentielle d'ordre un sans second membre a pour solution :

$$p(z) = p_0 e^{-z/H} \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{M_{\text{gaz}}g} \quad (1.11)$$

où  $p_0$  est la pression en  $z = 0$ . La pression, comme la masse volumique décroît exponentiellement avec l'altitude  $z$ .

- Appliquée à l'atmosphère isotherme elle donne la loi de **nivellement barométrique**. Si l'on prend une température moyenne de  $15^\circ\text{C}$ , la distance caractéristique  $H$  vaut alors (pour l'air  $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

$$H = \frac{8,314 \times 288}{29 \times 10^{-3} \times 9,81} = 8,4 \text{ km}$$

- Pour une petite variation d'altitude, la loi (1.10) donne

$$\frac{\delta p}{p} \simeq -\frac{\delta z}{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta p}{p} \sim -10^{-4} \quad \text{pour} \quad \delta z = 1 \text{ m}$$

En conclusion, on peut négliger la pesanteur dans un gaz sur une échelle de quelques mètres.

**Exercice** – Considérons une colonne cylindrique verticale d'atmosphère de section droite  $S = 1 \text{ m}^2$ . Calculer sa masse à partir de la loi (1.11) sachant que  $p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$  et  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Solution :  $10,3 \times 10^3 \text{ kg}$ .

## 1.4 Généralisation

### Équation fondamentale de la statique

La démarche que nous avons suivie pour étudier l'équilibre d'un fluide dans un champ de pesanteur, peut se généraliser à un fluide dans un champ de forces extérieures quelconque. L'équation que l'on obtient est l'**équation fondamentale de la statique des fluides**.

Supposons un fluide au repos dans un référentiel galiléen et soumis à un champ de forces extérieures. Chaque parcelle de fluide de volume  $d\tau$  subit, en plus des forces de pressions, une force

$$d\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{f}^{\text{ext}} d\tau$$

de sorte que l'équilibre se traduit par l'équation

$$\vec{f}^{\text{ext}} d\tau - \overrightarrow{\text{grad}p} d\tau = \vec{0}$$

d'où l'on tire

$$\vec{f}^{\text{ext}} - \overrightarrow{\nabla}p = \vec{0} \quad \heartsuit \quad (1.12)$$

Cette équation associée à l'équation d'état du fluide permet de déterminer l'évolution de la pression. La résolution de l'équation diffé-

entielle fait apparaître une constante d'intégration que l'on obtient à l'aide des conditions aux limites.

## Liquide en translation accélérée

Imaginons un verre d'eau initialement au repos dans un train immobile. La surface libre de l'eau est alors horizontale. À partir de  $t = 0$ , le train adopte un mouvement uniformément accéléré, d'accélération  $\vec{a} = a \vec{u}_x$  où  $\vec{u}_x$  est horizontal. Après un court instant pendant lequel le liquide oscille, un état de repos est atteint. Cherchons comment la pression varie dans le verre d'eau.

Tout d'abord, raisonnons dans le référentiel lié au verre : ce dernier n'est pas galiléen puisqu'il est accéléré par rapport au référentiel terrestre. Dans ce référentiel, il faut alors tenir compte des **forces d'inertie**. Faisons le bilan des forces extérieures que subit un élément de fluide de volume  $d\tau$  et de masse volumique  $\rho$ .

- **Pesanteur** :  $d\vec{P} = \rho d\tau \vec{g}$  d'où  $\vec{f}_g = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \rho \vec{g}$ .
- **Force d'inertie** :  $d\vec{F}_{ie} = -\rho d\tau \vec{a}$  d'où  $\vec{f}_{ie} = \frac{d\vec{F}_{ie}}{d\tau} = -\rho \vec{a}$ .

Appliquons l'équation fondamentale de la statique (1.12) :

$$\rho \vec{g} - \rho \vec{a} - \vec{\nabla} p = \vec{0}$$

Puisque le gradient de pression a deux composantes, l'une selon la verticale (orientée selon  $\vec{u}_z$ ) et l'autre selon l'horizontale (selon  $\vec{u}_x$ ), on en déduit que la pression dépend des coordonnées  $x$  et  $z$ . Projétons tout d'abord l'équation de la statique selon  $\vec{u}_z$  :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{puis intégrons} \quad p(x, z) = -\rho g z + f(x)$$

Dérivons la relation obtenue par rapport à  $x$  et comparons à ce que donne la projection de l'équation de la statique selon  $\vec{u}_x$  :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a$$

ce qui mène à  $f'(x) = -\rho a$ , soit  $f(x) = -\rho a x + f(0)$ . Finalement le champ de pression s'écrit

$$p(x, z) = -\rho g z - \rho a x + p(0, 0)$$

Les surfaces isobares sont donc des plans d'équation  $-\rho g z - \rho a x = C^{te}$ . La surface libre étant une surface isobare particulière elle vérifie la même équation. On constate alors que la surface libre est inclinée par rapport à l'horizontal d'un angle  $\alpha$  donné par

$$\tan \alpha = -\frac{a}{g}$$

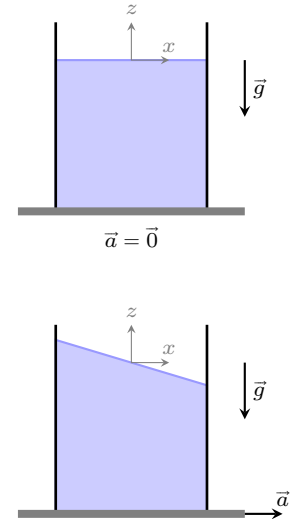


FIG. 1.8 : Évolution de la surface libre en cas d'accélération horizontale.

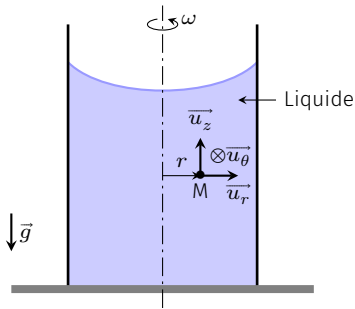


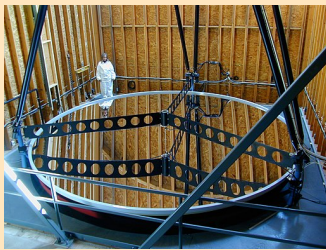
FIG. 1.9 : Cylindre en rotation.

**Télescope à miroir liquide**

Des équipes de l'Université Laval, de l'University of British Columbia et de l'Institut d'astrophysique de Paris, ont mis au point un télescope Nommé Large Zénith Telescope (LZT) dont le miroir primaire fait 6 mètres de diamètre. Contrairement aux télescopes conventionnels dont le miroir est fait de verre, le LZT a un miroir fait de liquide réfléchissant, du mercure plus précisément qui adopte une surface parabolique puisque mis en rotation dans une cuve. Le miroir parabolique obtenu permet de faire l'image d'une étoile au foyer de la parabole avec précision. Sa focale vaut

$$f = \frac{g}{2\omega^2}$$

La principale limitation du LZT, et des autres miroirs liquides, est qu'on ne peut le pointer ailleurs qu'au zénith, sinon le liquide s'échappe de la cuvette. Au-dessus du miroir, une étroite bande de ciel défile à la vitesse de la rotation terrestre. Un astre donné met environ une minute à traverser le champ de vision du télescope.



**Liquide en rotation**

Un flacon cylindrique ouvert, contient un liquide de masse volumique  $\rho$ . On fait tourner le flacon autour de son axe à la vitesse angulaire  $\omega$ . Ce liquide n'est donc pas au repos dans le référentiel du laboratoire. Cependant, après un régime transitoire qui dépend de la viscosité du liquide, celui-ci tourne de façon solide à la même vitesse angulaire que le cylindre. Ainsi, dans le référentiel lié au cylindre, le liquide est au repos. On raisonnera donc dans ce référentiel tournant (noté  $\mathcal{R}'$ ) munis d'un système de coordonnées cylindriques.

**Bilan des forces** – Le référentiel n'étant pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie :

- Tout d'abord, la force de Coriolis  $\vec{f}_{ic} = -2\rho\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$  est nulle car,  $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$ .
- La force d'entraînement (ou force centrifuge) vaut  $\vec{f}_{ie} = \rho r\omega^2 \vec{u}_r$ .
- La force volumique de pesanteur vaut  $\vec{f}_g = \rho \vec{g}$ .

L'équation de la statique des fluides (1.12) donne donc

$$\rho r\omega^2 \vec{u}_r + \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = \vec{0}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho r\omega^2 & \rightarrow p = 1/2\rho\omega^2 r^2 + f(z) \\ \frac{\partial p}{r\partial\varphi} = 0 & \downarrow \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g & \text{et } \frac{\partial p}{\partial z} = f'(z) \Rightarrow f(z) = -\rho g z + C^{te} \end{cases}$$

Finalement la pression dépend de la distance à l'axe  $r$  et de  $z$  :

$$p(r, z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C^{te}$$

La surface libre étant une surface isobare, elle obéit à l'équation

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

La surface libre adopte une forme parabolique d'axe de révolution ( $Oz$ ).

**Poussée d'Archimède**

Imaginons un solide cubique d'arête  $a$  complètement immergé dans un liquide au repos dans le champ de pesanteur. Calculons la résultante des forces de pression  $\vec{\Pi}$  qui s'exercent sur le cube.

- Tout d'abord, la pression ne dépend que de la profondeur :

$$p(z) = p_0 + \rho g z$$

- Par symétrie, les forces de pression horizontales se compensent, contrairement aux forces verticales du fait de la variation de pression avec la profondeur.  $\vec{\Pi}$  est donc suivant Oz :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= p(z) a^2 \vec{u}_z - p(z+a) a^2 \vec{u}_z \\ &= -\rho g a^3 \vec{u}_z \\ \vec{\Pi} &= -m_d \vec{g} \end{aligned}$$

où  $m_d$  désigne la masse de liquide déplacé.

On obtient donc une force ascendante opposée au poids du volume de liquide déplacé.

Ce résultat particulier se généralise sans difficulté **quelle que soit la forme du corps immergé et quel que soit le fluide**. Appelons  $V_0$  le volume d'un solide et  $S_0$  l'aire de sa surface. Immergeons ce corps dans un fluide quelconque au repos dans un champ de pesanteur. La résultante des forces de pression qu'il subit s'écrit

$$\vec{\Pi} = \oint_{M \in (S_0)} -p(M) \vec{n}^{ext} dS = \iiint_{M \in (V_0)} -\vec{\nabla} p d\tau$$

La deuxième intégrale étant issue du résultat mathématique (1.6). Il faut bien avoir conscience qu'il n'y a pas, ici, de gradient de pression dans le volume  $V_0$  puisqu'il n'y a pas de fluide.  $\vec{\nabla} p$  représente le gradient de pression qui règnerait si le volume  $V_0$  était occupé par le fluide. Dans ce cas, on aurait  $\rho \vec{g} = \vec{\nabla} p(M)$  puisque l'on suppose l'équilibre. On en déduit

$$\vec{\Pi} = \iiint_{M \in (V_0)} -\rho(M) \vec{g} d\tau = -m_d \vec{g}$$

Cette force, opposée à la pesanteur, s'appelle la poussée d'Archimède.

### Théorème d'Archimède (250 av.J.C.)

Tout corps immergé partiellement ou totalement dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède, dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé. Le point d'application de cette force est le centre de poussée; il est différent, en général, du centre de gravité.

### Applications –

- Flottaison des bateaux et autres corps flottants;
- Ascension des ballons sondes;
- Courants de convection etc.

**Exercice** – Je monte sur une balance qui m'indique que je « pèse 67,2 kg ». Imaginons que la pression atmosphérique passe de 1 bar à 2 bar. Comment évolue l'indication de la balance? Pouvez-vous donner un ordre de grandeur?

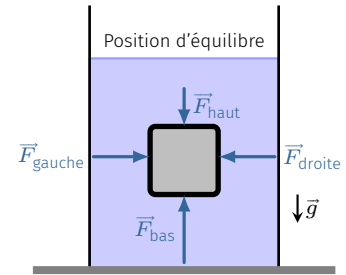


FIG. 1.10 : Calcul de la poussée d'Archimède sur un cube.

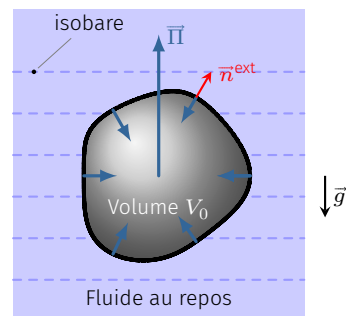


FIG. 1.11 : Cas d'un volume quelconque.



De nombreuses expériences de la vie quotidienne ne peuvent pas trouver d'explication avec les lois vues jusqu'ici. C'est en tenant compte des propriétés des interfaces qu'on peut les justifier notamment grâce au concept de tension superficielle. **La capillarité** est la science qui s'intéresse à ces phénomènes et qui joue un rôle majeur dans de nombreux domaines scientifiques (climat, chimie de formulation, industrie du verre etc.).

On propose ici une présentation classique de la capillarité; pour les aspects dynamiques et une vision plus moderne de cette science voir [1].

### Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/tension-de-surface.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/tension-de-surface.php)

## 2.1 Énergie de surface

### Origine microscopique

Jusqu'ici nous avons considéré le fluide comme un milieu continu contraint par des conditions aux limites que l'on a traité de façon simpliste<sup>1</sup>. En réalité, pour décrire correctement la physique aux interfaces il faut tenir compte des interactions moléculaires à courte portée qui s'exercent de part et d'autre de l'interface. La théorie classique de la capillarité consiste à modéliser une interface comme une surface mathématique auquel on associe une certaine élasticité représentée par la propriété physique que nous appellerons **tension superficielle**.

Essayons de justifier cette notion par un modèle simple. Considérons un liquide  $\mathcal{F}_1$  en contact avec sa vapeur  $\mathcal{F}_2$ . Au sein de chaque fluide les molécules subissent des interactions de très courte portée (interactions de van der Waals attractives). Ainsi, dans  $\mathcal{F}_1$ , chaque molécule possède une énergie d'interaction  $\epsilon_1 < 0$  résultat de l'interaction attractive avec son voisinage immédiat. De même on définira une énergie d'interaction  $\epsilon_2$  au sein du fluide  $\mathcal{F}_2$ . Par contre, il existe une couche de fluide dans laquelle les molécules sont soumises à l'action des deux fluides. L'épaisseur de ce film moléculaire est de l'ordre de la dimension  $a$  d'une molécule. Appelons alors  $\epsilon_{12}$  l'énergie d'interaction d'une « molécule interfaciale ». Bien entendu, on a  $|\epsilon_{12}|$  compris entre  $|\epsilon_1|$  et  $|\epsilon_2|$ . Si  $N$  est le nombre de molécules et  $N_s$  le nombre de molécules à l'interface, l'énergie du liquide  $\mathcal{F}_1$  vaut

$$\mathcal{E}_1 = (N - N_s)\epsilon_1 + N_s\epsilon_{12} = N\epsilon_1 + \mathcal{E}_s$$

où  $\mathcal{E}_s = N_s(\epsilon_{12} - \epsilon_1)$  représente l'énergie de l'interface. On voit donc que l'on peut associer à l'interface une énergie liée à l'**anisotropie**

- 2.1 Énergie de surface . . . . . 15
  - Origine microscopique . . . . . 15
  - Conséquences expérimentales . . . . . 16
  - Rôle des tensio-actifs . . . . . 17
- 2.2 Forces capillaires . . . . . 17
  - Mise en évidence . . . . . 17
  - Application à la mesure de tension de surface . . . . . 18
  - Théorème de Laplace . . . . . 20
- 2.3 Mouillage . . . . . 22
  - Angles de contact . . . . . 22
  - Ascension capillaire . . . . . 23
- 2.4 Approche thermodynamique . . . . . 23
  - Identité thermodynamique . . . . . 24
  - Exemple de calcul . . . . . 24

<sup>1</sup> : Jusqu'ici on a admis la continuité de la pression aux interfaces par exemple.

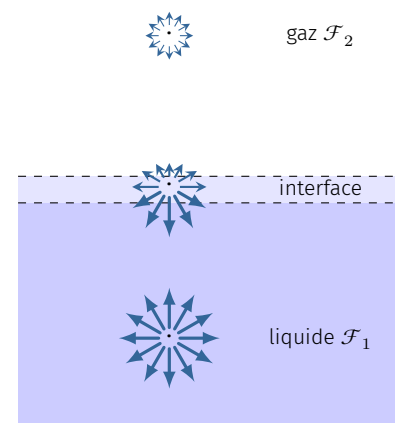


FIG. 2.1 : Interactions au sein d'un fluide.

**des forces d'interaction moléculaire.** Le terme d'anisotropie  $\epsilon_{12} - \epsilon_1$  est positif. Enfin, le nombre de molécules à l'interface est proportionnel à l'aire  $S$  de l'interface. On a approximativement  $N_s \simeq S/a^2$  de sorte que l'on peut écrire

$$\mathcal{E}_s = \gamma S \quad \text{avec} \quad \gamma \simeq \frac{\epsilon_{12} - \epsilon_1}{a^2} > 0 \quad \heartsuit \quad (2.1)$$

où  $\gamma$  est par définition la **tension superficielle**.

Ainsi, la tension superficielle est une grandeur positive qui *caractérise une interface* et représente l'énergie interfaciale par unité de surface. Elle s'exprime en  $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$  et dépend notamment des interactions moléculaires.

## Conséquences expérimentales

Augmenter l'aire d'une interface de  $dS$ , présente donc un coût énergétique qui s'élève à

$$d\mathcal{E} = \gamma dS \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

**Forme des bulles et gouttes** – Ainsi un liquide adoptera une forme qui minimise la surface compte tenu des contraintes. On montre que pour un volume donné la surface qui minimise l'énergie est une sphère. Par exemple une goutte d'huile dans un mélange eau-alcool de densité identique sera sphérique. De la même manière, les bulles de gaz carbonique dans le champagne sont sphériques.

**Coalescence** – On montre aussi que deux gouttes sphériques auront intérêt à former une goutte plus grosse. Ainsi quand on agite énergiquement un mélange eau-huile on obtient une émulsion de petites gouttes d'huile dans l'eau. Cette émulsion est instable : les petites gouttes *coalescent* et l'on obtient après un certain temps de l'huile avec de l'eau au dessous.

FIG. 2.2 : Coalescence de deux gouttes (©CNRS)

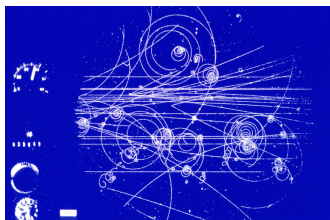


FIG. 2.3 : Production de particules dans la première chambre à bulles à hydrogène liquide du CERN

2 : Ce phénomène fut utilisé dans un autre détecteur de particule : la chambre à Wilson.

**Exercice** – Considérons deux gouttes d'eau sphériques de rayon  $r$  qui coalescent pour ne former qu'une seule goutte de rayon  $r'$ . Montrer que cette transformation s'accompagne d'un gain d'énergie.

**Retard des changements d'état** – Lorsque l'on détend un liquide de façon isotherme, la thermodynamique prévoit qu'en dessous d'une pression dite *pression de vapeur saturante*, le liquide change de phase pour se vaporiser. Cependant la formation de la première bulle de vapeur coûte de l'énergie de sorte que le liquide peut exister dans une phase métastable en dessous de la pression de vapeur saturante. On parle de retard à la vaporisation. Une simple perturbation locale peut suffire à déclencher la formation d'une première bulle de vapeur. C'est ce phénomène qui fut employé dans les détecteurs de particules du milieu du XX<sup>e</sup> siècle (chambres à bulles). De manière analogue, il y a retard à la liquéfaction pour la vapeur sursaturante<sup>2</sup>.

## Rôle des tensio-actifs

Les tensioactifs sont constituées de molécules *amphiphiles* c'est-à-dire munies d'un pôle hydrophile et d'une longue chaîne hydrophobe. Lorsqu'un tensioactif est ajouté à de l'eau il vient se placer immédiatement à la surface, avec la queue hydrophobe pointant à l'extérieur de la surface. Ce processus s'accompagne d'une diminution de l'énergie de surface et donc d'une **chute de la tension superficielle**. Ce n'est qu'une fois la surface saturée, et n'offrant plus d'espace disponible à de nouvelles molécules amphiphiles, que les tensioactifs vont former des structures organisées au sein du liquide : ce sont les micelles. Les micelles sont des structures sphériques ou ellipsoïdales dont la surface est constituée des têtes hydrophiles des tensioactifs, alors que les queues hydrophobes de ces derniers sont regroupées à l'intérieur. L'effet nettoyant des tensioactifs découle du fait que les substances hydrophobes, telles que les matières grasses, peuvent être contenues à l'intérieur des micelles. La concentration de tensioactifs au-dessus de laquelle les micelles commencent à se former est connue comme la concentration micellaire critique (CMC). Elle s'obtient en déterminant la concentration à partir de laquelle la tension superficielle cesse de chuter.

## 2.2 Forces capillaires

### Mise en évidence

#### Expérience

Plongeons un contour métallique dans de l'eau savonneuse puis retirons le. Il se forme alors une membrane liquide plane qui s'appuie sur le contour. Auparavant, nous avons pris soin de fixer un fil souple formant une boucle qui adopte une forme quelconque. Lorsque l'on crève au moyen d'une aiguille la membrane située dans la boucle, celle-ci adopte aussitôt une géométrie circulaire (FIG. 2.4). Cette expérience montre que la boucle est soumise à des forces dites **forces capillaires** aux propriétés suivantes :

- Ces forces sont perpendiculaires en chaque point du contour et tendent à minimiser l'aire du film d'eau savonneuse.
- Ces forces sont tangentes à l'interface.
- Elles sont réparties de façon uniforme. On peut donc définir une densité linéique de force  $dF/d\ell$ .

De la même façon, si l'on forme une lame d'eau savonneuse sur un cadre rectangulaire dont un des côtés est mobile, le liquide cherchant à minimiser sa surface, il faut exercer une force sur la tige mobile pour maintenir la surface constante.

On peut obtenir l'expression de cette force à l'aide d'un raisonnement énergétique : supposons qu'un opérateur déplace de façon quasi-statique la tige de longueur  $\ell$  en produisant une force  $\vec{F}_{op}$ . Si l'on note  $dx$  le déplacement, le théorème de l'énergie cinétique **appliqué**



FIG. 2.4 : Mise en évidence des forces capillaires.

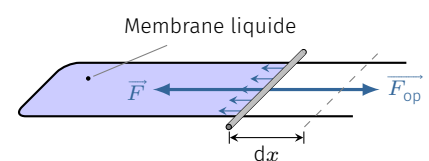


FIG. 2.5 : La tension superficielle peut s'interpréter comme une densité linéique de forces.

Lorsque que l'on traite une membrane d'eau savonneuse, il ne faut pas oublier qu'il y a deux interfaces liquide-gaz ce qui explique la présence du facteur deux.

à la tige T donne

$$d\mathcal{E}_c = 0 = \sum \text{travaux} = F_{\text{op}} dx + \delta W_{\text{liq} \rightarrow \text{T}}$$

où  $\delta W_{\text{liq} \rightarrow \text{T}}$  est le travail des forces capillaires sur la tige. Or, lors du déplacement de la tige la membrane reçoit une énergie

$$d\mathcal{E} = 2\gamma \times (\ell dx) = W_{\text{T} \rightarrow \text{liq}} = -W_{\text{liq} \rightarrow \text{T}}$$

En réinjectant  $W_{\text{liq} \rightarrow \text{T}}$  dans le théorème de l'énergie, on trouve  $f_{\text{op}} = 2\gamma\ell$ . Et comme  $F_{\text{op}} = F$  (évolution quasi-statique), on obtient

$$F = 2\gamma\ell \quad (2 \text{ interfaces}) \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

De façon général, on peut traiter une interface comme une membrane tendue : chaque portion de surface est le siège de forces capillaires réparties sur le contour  $\mathcal{C}$  délimitant la portion de surface. Ces forces sont tangentes à l'interface, perpendiculaires en tout point de  $\mathcal{C}$  et données par la relation

$$\overrightarrow{dF} = \gamma d\ell \overrightarrow{n} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{n} \perp \mathcal{C} \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

Finalement, la tension superficielle est *une force par unité de longueur*, c'est pourquoi on l'exprime couramment en  $\text{N.m}^{-1}$ .

## Application à la mesure de tension de surface

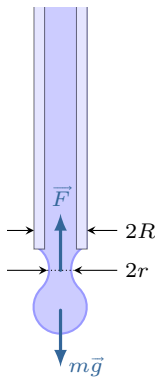


FIG. 2.6 : Stalagmométrie.

**Mesure relative par stalagmométrie** – La mesure consiste à compter les gouttes sortant d'un compte-gouttes. Chaque goutte se détache au niveau du col de rayon  $r$  lorsque le poids du volume de la goutte dépasse les forces capillaires. Si l'on note  $m$  la masse de la goutte au moment où elle se détache, on a

$$mg = 2\pi r\gamma$$

En général on connaît le volume  $V$  du compte-goutte et l'on compte le nombre  $n$  de gouttes. La relation précédente devient

$$\frac{\rho V}{n} g = 2\pi r\gamma$$

où  $\rho$  est la masse volumique du liquide. Si l'on suppose que  $r$  ne dépend pas du liquide utilisé, mais seulement du diamètre du compte-goutte, alors on peut appliquer le même raisonnement pour un liquide de référence (eau à  $20^\circ\text{C}$  en général) :

$$\frac{\rho_{\text{ref}} V_{\text{ref}}}{n_{\text{ref}}} g = 2\pi r\gamma \quad (\text{étalonnage})$$

Le rapport des deux relations précédentes mène à la relation

$$\gamma = \gamma_{\text{ref}} \frac{\rho/n}{\rho_{\text{ref}}/n_{\text{ref}}}$$

La connaissance de la masse volumique et du nombre de gouttes permet donc de comparer la tension de surface avec celle d'un liquide de référence.

**Mesure absolue par la méthode d'arrachement** – Historiquement la méthode de l'anneau a été la première à être développée. Il s'agit de plonger un anneau (en platine en général) dans le liquide à étudier puis de le remonter délicatement de façon à étirer un film au-dessous de l'anneau. Au cours de l'étirement du film de liquide, la

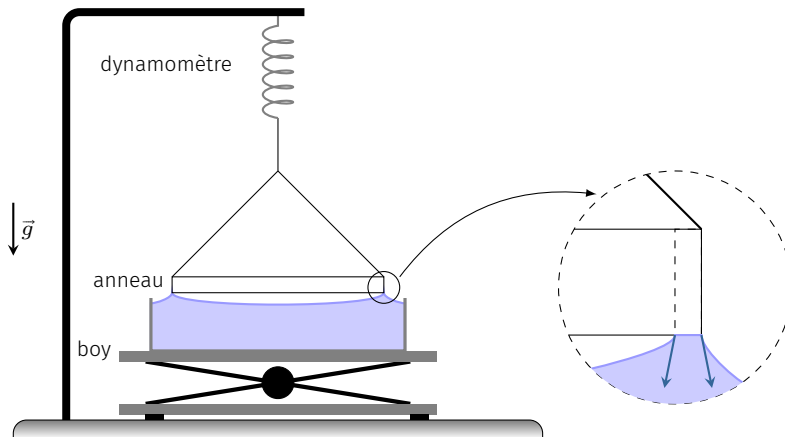


FIG. 2.7 : Méthode de l'anneau.

force exercée sur l'anneau est mesurée à l'aide d'un dynamomètre et le système passe par un seuil où la force est maximale : dans ce cas les forces capillaires sont verticales. Si l'on note  $r_1$  le rayon intérieur de l'anneau et  $r_2$  son rayon extérieur, on a la relation.

$$F_{\max} = 2\pi(r_1 + r_2)\gamma \simeq 4\pi r\gamma \quad \text{avec} \quad r_1 \simeq r_2 = r$$

Sa mesure permet donc de déterminer la tension superficielle du liquide.

**Ordre de grandeur** – À température ordinaire, pour les liquides moléculaire, la tension superficielle vaut quelques dizaines de  $\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$ . Les liquides métalliques ont des tensions superficielles un ordre de grandeur au dessus.

Tension superficielle de quelques interfaces liquide-air		
Liquides	Température	Tension superficielle [ $\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$ ]
Benzène	20 °C	29
Eau	20 °C	73
Eau	80 °C	62
Glycérine	20 °C	63
Hexadécane	20 °C	27
Huile d'olive	20 °C	32
Mercure	18 °C	475
Plomb	327 °C	462

La tension superficielle varie avec la température. Pour les corps purs,  $\gamma$  diminue linéairement avec la température jusqu'à s'annuler à la

température critique

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \quad (\text{formule d'Eötvös})$$

### Théorème de Laplace

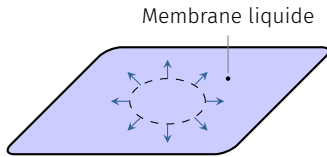
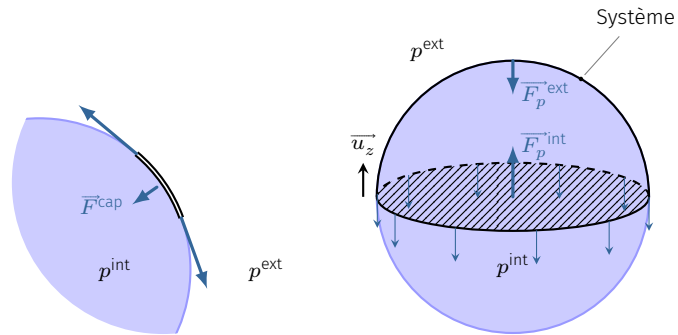


FIG. 2.8 : La résultante des forces capillaires qu'exerce la membrane sur un contour fermé est nulle si la membrane est plane.

Un petit contour pris dans la surface libre plane d'un liquide en équilibre est soumis à des forces de tension superficielle situées dans son plan et dont la résultante est nulle.

Par contre, pour une surface sphérique, les forces exercées sur ce même contour ont une résultante orientée vers l'intérieur de la sphère; il faut donc une surpression  $\Delta p$  pour que l'équilibre existe. On voit immédiatement que plus la courbure est importante et plus  $\Delta p$  sera grand.

FIG. 2.9 : À gauche : existence d'une surpression dans une goutte. La courbure entraîne l'existence d'une résultante des forces capillaires dirigée vers le centre de courbure. À droite : forces agissantes sur une portion hémisphérique d'une goutte liquide. Les flèches réparties sur le contour circulaire représentent les forces capillaires.



Calculons la surpression  $\Delta p$  qui règne à l'intérieur d'une goutte sphérique de rayon  $R$  en faisant un bilan des forces sur une demi-goutte :

- La pression extérieure produit une force pressante

$$\vec{F}_p^{\text{ext}} = - \iint p^{\text{ext}} \vec{n} \, dS = -p^{\text{ext}} \pi R^2 \vec{u}_z$$

- La pression intérieure produit une force pressante

$$\vec{F}_p^{\text{int}} = p^{\text{int}} \pi R^2 \vec{u}_z$$

- Enfin, l'hémisphère inférieure exerce sur le contour du système des forces capillaires orientées vers le bas dont la résultante s'écrit

$$\vec{F}^{\text{cap}} = \oint \gamma \, d\ell (-\vec{u}_z) = -2\pi R \gamma \vec{u}_z$$

L'équilibre du système se traduit par

$$(p^{\text{int}} - p^{\text{ext}}) \pi R^2 - 2\pi R \gamma = 0$$

ce qui donne une surpression

$$\Delta p = p^{\text{int}} - p^{\text{ext}} = \frac{2\gamma}{R} \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

De la même manière, à l'intérieur d'une bulle de savon, il règne une surpression

$$\Delta p = p^{\text{int}} - p^{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{R}$$

où le facteur 4 est dû au fait que la bulle de savon présente deux interfaces liquide-gaz.

**Ordre de grandeur** – Pour une bulle de savon de rayon  $R \simeq 1$  cm et  $\gamma \simeq 25 \cdot 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  on obtient  $\Delta p \simeq 10$  Pa. Pour faire des grosses bulles il faut fournir beaucoup d'énergie (surface importante) et générer une faible surpression; il faut donc souffler tout doucement et longtemps.

**Mûrissement d'une mousse** – Dans une mousse humide (mousse à raser, mousse de bière, etc.), du gaz est enfermé dans des bulles sphériques séparées par un film liquide pouvant plus ou moins laisser diffuser le gaz selon l'épaisseur de la membrane et la taille des molécules gazeuses. Le gaz emprisonné est en surpression par rapport au liquide en vertu de la loi (2.5). Par ailleurs la surpression est plus importante dans les petites bulles. C'est ce qui explique le phénomène de **mûrissement** d'une mousse : Le gaz contenu dans les petites bulles traverse la membrane liquide par diffusion pour se diriger dans les zones de moins grande pression, c'est-à-dire, dans les grosses bulles. Les petites bulles se vident donc dans les grosses et la mousse s'enrichit en grosses bulles.

La généralisation à une géométrie quelconque est donnée par la loi de Laplace-Young :

#### Loi de Laplace-Young

La différence de pression à la traversée d'une interface séparant un fluide intérieur et un fluide extérieur est donnée par

$$p^{\text{int}} - p^{\text{ext}} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure de l'interface selon deux directions orthogonales. Par convention, ces rayons sont positifs quand le centre de courbure est dans le fluide intérieur. Dans le cas d'une interface sphérique, ces deux rayons de courbure s'identifient au rayon de la sphère.

**Surface minimale** – Lorsque l'on trempe une structure métallique dans une eau de savon, on obtient une surface minimale (l'interface va chercher à minimiser l'énergie superficielle) qui a la propriété suivante : si la surface est ouverte,  $\Delta p = 0$  et donc

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

On dit que la courbure moyenne est nulle. Dans la plupart des cas on obtient des lames planes qui forment une surface minimale ( $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ ). On peut aussi obtenir des lames avec deux rayons de courbures opposés comme sur la [Fig. 2.10](#) montrant une *caténoïde*.

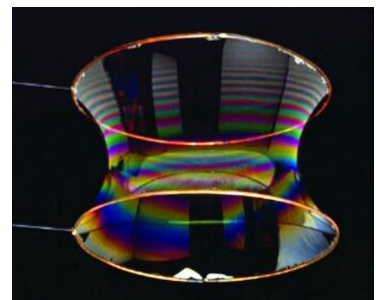


FIG. 2.10 : Lame de savon formant une caténoïde (© Berkeley Science Review).

### 2.3 Mouillage

#### Angles de contact

**Équilibre au contact de trois fluides** – Déposons une petite quantité de liquide 2 sur un autre liquide 1 plus dense et non miscible. L'ensemble des points en contact avec les deux liquides et l'air forme un contour appelé ligne triple. Intéressons nous aux forces capillaires s'exerçant sur cette ligne triple. Notons  $\vec{\gamma}_{ij}$  la force capillaire par unité de longueur due à l'interface entre les fluides  $i$  et  $j$ . L'équilibre n'est possible que si la résultante des forces capillaires peut s'annuler ce qui définit l'angle de contact  $\theta$  :

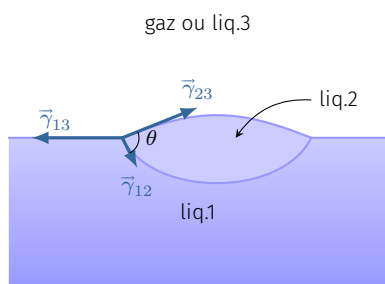


FIG. 2.11 : Définition de l'angle de contact.

$$\vec{\gamma}_{12} + \vec{\gamma}_{23} + \vec{\gamma}_{31} = \vec{0}$$

Cet équilibre suppose que l'on puisse former un triangle avec les trois vecteurs  $\vec{\gamma}_{ij}$  ce qui n'est possible qu'à condition que **chaque tension de surface soit inférieure à la somme des deux autres**. Dans le cas contraire, le liquide 2 s'étale sur le liquide 1 : on dit qu'il y a **mouillage total**.

**Exercice** – Déposons une goutte d'huile d'olive sur de l'eau. Sachant que  $\gamma_{\text{eau-air}} = 73 \text{ mN.m}^{-1}$ ,  $\gamma_{\text{huile-air}} = 32 \text{ mN.m}^{-1}$  et  $\gamma_{\text{huile-eau}} = 18 \text{ mN.m}^{-1}$ , dire s'il y a étalement ou non.

Solution : l'huile d'olive s'étale.

**Équilibre d'un liquide au contact d'un solide** – Déposons une goutte de liquide sur un support plan. En général, le liquide adopte la forme décrite sur la Fig. 2.12, résultat d'un compromis entre le poids qui tend à diminuer la position du centre de gravité de la goutte et des forces capillaires qui tendent à minimiser l'aire de la surface libre. À l'équilibre, la résultante des forces capillaires en un point de la ligne triple s'annule. En projection sur le plan de la surface solide, on a donc

$$\gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos \theta = \gamma_{SG}$$

Cette relation trouvée par Young en 1805 définit l'angle de contact  $\theta$ . On distingue trois cas de figure :

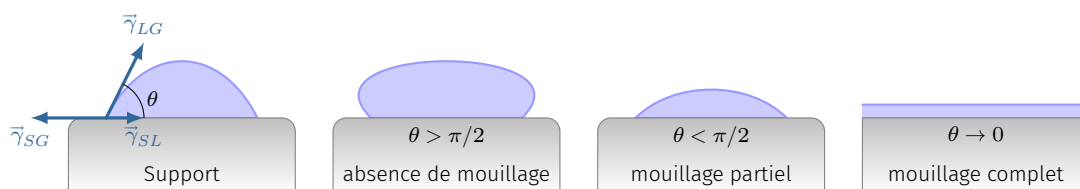


FIG. 2.12 : Différents équilibres d'un liquide au contact d'un substrat solide.

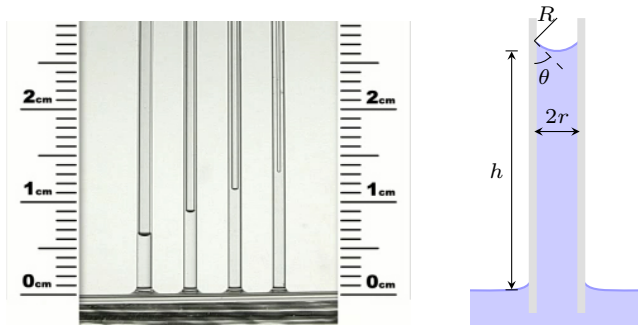
- $\theta > \pi/2$  : le liquide est non mouillant (exemple : verre-mercure-air)
- $\theta \in [0, \pi/2]$  : il y a mouillage partiel (exemple : verre-eau-air)
- Lorsque l'angle de contact n'est pas défini, il y a mouillage complet du liquide sur le substrat solide.

## Ascension capillaire

Quand on plonge un tube fin<sup>3</sup> de rayon  $r$  dans de l'eau, on observe l'ascension d'une colonne d'eau dans le capillaire malgré la pesanteur. Cette ascension est d'autant plus importante que le rayon est petit.

$$h = \frac{C^{\text{te}}}{r} \quad (\text{loi de Jurin})$$

où la constante dépend du liquide et de l'angle de contact. On peut



3 : Ces tubes ont la finesse d'un cheveu d'où l'appellation *tubes capillaires*.

FIG. 2.13 : Expérience et schéma.

utiliser la loi de Laplace-Young pour démontrer la loi de Jurin. En effet, considérons l'interface liquide raccordée à la paroi du tube avec un angle  $\theta$  et supposons que le ménisque est sphérique<sup>4</sup> de rayon  $R$ . L'air étant à la pression  $p_0$ , la pression qui règne dans le liquide au voisinage du ménisque vaut  $p_0 - \Delta p$  avec  $\Delta p = 2\gamma/R$  en vertu de la loi de Laplace-Young. Le rayon de courbure vaut  $R = r/\cos\theta$  d'où

$$p_h = p_0 - \frac{2\gamma \cos\theta}{r}$$

Or, si l'on applique les lois de l'hydrostatique au niveau de la surface libre du récipient dans lequel plonge le tube, on trouve

$$p_0 = p_h + \rho gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r}$$

Il y a donc ascension capillaire si le liquide mouille la paroi ( $\theta < \pi/2$ ). Par contre pour un liquide non mouillant il y a descente capillaire (cas du mercure dans un capillaire en verre).

**Exercice** – On plonge côte à côte deux tubes capillaires de diamètres intérieurs  $d_1 = 0,20$  mm et  $d_2 = 0,40$  mm dans de l'huile d'olive. On mesure une différence de hauteur d'ascension de 31 mm. En déduire la tension superficielle de l'huile d'olive en supposant que l'huile mouille parfaitement les parois du tube capillaire. On donne  $\rho_{\text{huile}} = 918 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$

Solution :  $\gamma_{\text{huile}} = 28 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ .

4 : Ce qui suppose  $r \ll \ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$

## 2.4 Approche thermodynamique

Dans toute la suite on note  $A$  l'aire de l'interface au lieu de  $S$ , notation que l'on réserve à l'entropie.

## Identité thermodynamique

Soit un système liquide que l'on décrit par son volume  $V$ , son aire  $A$  sa température  $T$  et sa pression  $p$ . Appelons également  $U$  son énergie interne, et  $S$  son entropie. Imaginons une transformation infinitésimale réversible pendant laquelle le système reçoit un transfert thermique  $\delta Q^{\text{rev}}$  et un travail  $\delta W^{\text{rev}} = -p dV + \gamma dA$  où  $\gamma$  est la tension superficielle.

En vertu du second principe, on a  $\delta Q^{\text{rev}} = T dS$ , et le premier principe donne l'identité thermodynamique

$$dU = \delta Q^{\text{rev}} + \delta W^{\text{rev}} \quad \text{soit} \quad dU = T dS - p dV + \gamma dA$$

Introduisons maintenant l'**énergie libre**, une grandeur notée  $F$  (comme *free energy*) et définie par

$$F \stackrel{\text{def}}{=} U - TS$$

Sa différentielle s'écrit

$$dF = dU - T dS - S dT = -S dT - p dV + \gamma dA$$

identité qui montre que l'énergie libre est une fonction de  $T$ ,  $V$  et  $A$ .

Si maintenant on fixe la température et l'on suppose le liquide incompressible ( $V$  est donc constant), on obtient  $dF = \gamma dA$ .

### À retenir

Le terme  $\gamma dA$  représente la variation d'énergie libre du liquide quand on augmente son aire à température constante.

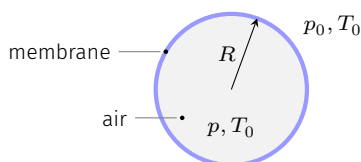


FIG. 2.14 : Bulle de savon enfermant de l'air à la pression  $p$ .

## Exemple de calcul thermodynamique : la loi de Laplace

Essayons de retrouver la formule de Laplace relative à une bulle de savon à l'aide d'une analyse thermodynamique.

Considérons une bulle de savon de rayon  $R$ , enfermant un volume  $V$  d'air et présentant une interface d'aire  $A = 2 \times 4\pi R^2$ . Prenons comme système l'ensemble {volume d'air + membrane de savon}.

On impose une température extérieure  $T_0$  et une pression  $p_0$ . Dans ce cas, on sait qu'à l'équilibre l'enthalpie libre  $G = U + p_0 V - T_0 S$  sera minimale.

On détermine donc l'équilibre en résolvant l'équation  $dG = 0$ . On a ici

$$dG = dU + p_0 dV - T_0 dS$$

avec, en vertu de l'additivité de l'entropie et de l'énergie

$$dU = dU_{\text{air}} + dU_{\text{membrane}} \quad \text{et} \quad dS = dS_{\text{air}} + dS_{\text{membrane}}$$

### Rappel

Pour une évolution monotherme et monobare, le second principe stipule que  $\Delta S \geq \frac{Q}{T_0}$  et le premier principe  $\Delta U = Q - p_0 \Delta V$  si les seules forces extérieures sont les forces de pression. Il est assez facile de montrer alors que  $\Delta G \leq 0$  : l'enthalpie libre décroît jusqu'à atteindre un minimum à l'équilibre.

Le système est à la température  $T_0$ , et l'on note  $p$  la pression de l'air dans la bulle que l'on cherche à déterminer. On a donc

$$dU_{\text{air}} = T_0 dS_{\text{air}} - p dV \quad \text{et} \quad dU_{\text{membrane}} = T_0 dS_{\text{membrane}} + \gamma dA$$

En rassemblant tous les termes et en remplaçant  $V$  et  $A$  par leur expression, on trouve

$$dG = [(p_0 - p)4\pi R^2 + 16\pi R\gamma] dR$$

Ainsi, l'équilibre est obtenu quand  $dG = 0$  soit lorsque

$$\boxed{p - p_0 = \frac{4\gamma}{R} \quad (\text{CQFD})}$$



## **Deuxième partie**

# **DYNAMIQUE DES FLUIDES**



Dans ce cours, nous étudions le fluide et son écoulement indépendamment des forces qui en sont responsables.

### Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/cinematique.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php)

## 3.1 Description d'un fluide en écoulement

### Deux points de vue

Tout d'abord, comme on l'a déjà dit, on décrit le fluide comme un ensemble d'une infinité de **particules de fluide**. On considère, autour d'un point P, un volume mésoscopique  $d\tau$ . Ce volume contient un grand nombre  $N$  de molécules ce qui permet de définir des *grandeurs moyennes locales* qui, elles, vont évoluer de façon continue. On définit alors la vitesse locale  $\vec{v}$  d'une particule de fluide P par

$$\vec{v}_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = \langle \vec{v}_i \rangle$$

où  $\vec{v}_i$  est le vecteur vitesse d'une molécule située dans le volume  $d\tau$ . Ainsi, lorsque le fluide est au repos,  $\vec{v}_p = \vec{0}$  bien que  $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ .

Deux approches différentes existent pour décrire le fluide en mouvement.

**Point de vue de Lagrange** – On s'intéresse à l'histoire des particules de fluide en suivant leur trajectoire. Chaque trajectoire est donc associée à une particule donnée (que l'on notera P). Au cours du trajet, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, et l'accélération de la particule s'écrit

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt}$$

conformément aux lois vues en mécanique du point.

**Point de vue d'Euler** – Dans cette approche, on s'intéresse au fluide dans son ensemble à un instant  $t$ . Pour chaque point du fluide (notons le M) on observe le vecteur vitesse à l'instant  $t$ . Comme ce vecteur dépend du temps  $t$  et de la position du point considéré, on note cette grandeur

$$\vec{v}(M, t) \quad \text{ou} \quad \vec{v}(x, y, z, t)$$

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un **champ vectoriel spatio-temporel**. Pour représenter le champ de vitesse, on utilise la notion de **ligne de champ** : à un instant  $t$  fixé, on trace différentes courbes qui ont la particularité d'avoir leur tangente en un point colinéaire à la vitesse en ce même point, ceci pour tous les points de la courbe. Ces

- 3.1 Description d'un fluide en écoulement . . . . . 29
  - Deux points de vue . . . . . 29
  - Écoulement stationnaire . . . . . 30
  - Accélération . . . . . 31
  - Dérivée particulaire . . . . . 32
  - Techniques de visualisation 32
- 3.2 Conservation de la masse 33
  - Débit massique . . . . . 33
  - Débit volumique . . . . . 34
  - Équation de continuité . . . . . 34
- 3.3 Écoulement incompressible 35
  - Dilatation . . . . . 35
  - Conservation du débit volumique . . . . . 36

Sa dimension doit être grande devant le libre parcours moyen des molécules. Dans les conditions standards, un volume de  $1 \mu\text{m}^3$  convient.

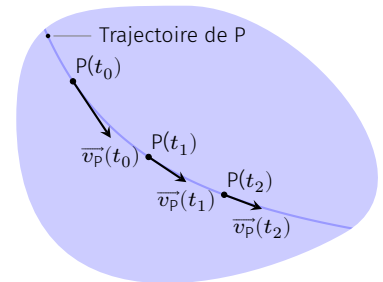


FIG. 3.1 : Notion de trajectoire.

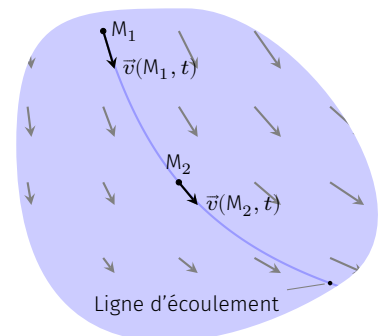


FIG. 3.2 : Notion de ligne d'écoulement. Notez que toutes les vitesses représentées concernent le même instant.

courbes sont appelées **lignes de courant** ou **lignes d'écoulement**. Notez que la ligne d'écoulement est fondamentalement différente d'une trajectoire, car tous les points de la ligne sont observés au même instant, contrairement à la trajectoire.

Pour un problème à deux dimensions, l'équation  $f(x, y) = 0$  d'une ligne d'écoulement s'obtient en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y, t)}{v_x(x, y, t)} \quad \text{avec } t \text{ fixe}$$

**Exercice** – On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(M, t) = -kx \vec{u}_x + ky \vec{u}_y \quad \text{avec } k = C^e$$

- Quelle est l'équation des lignes d'écoulement ?
- La vitesse est-elle constante le long d'une ligne de courant ?

## Écoulement stationnaire

### Définition

Un écoulement est stationnaire<sup>1</sup> si le champ de vitesse ne dépend pas **explicitement** du temps  $t$ . Mathématiquement cela se traduit pas

$$\frac{\partial \vec{v}(x, y, z, t)}{\partial t} = \vec{0}$$

<sup>1</sup> : On parle aussi d'écoulement permanent

Cela signifie que :

- l'expression du champ de vitesse ne dépend que de  $x$ ,  $y$  et  $z$  (en coordonnées cartésiennes);
- la carte du champ de vitesse est invariable au cours du temps;
- les lignes de courant sont fixes dans le temps.

Attention, cela ne signifie pas que les particules se déplacent à vitesse constante.

### Exemple

Supposons un fluide en écoulement présentant un champ de vitesse

$$\vec{v}(M, t) = \frac{x}{\tau} \vec{u}_x \quad \text{avec } \tau > 0$$

L'écoulement est stationnaire puisque  $\partial \vec{v}(M, t) / \partial t = \vec{0}$ . De plus, en tout point, le vecteur vitesse à la même direction. Par conséquent, les lignes d'écoulement sont des droites parallèles de vecteur directeur  $\vec{u}_x$ .

Intéressons-nous à la vitesse d'une particule de fluide en particulier. Appelons P la particule située en  $x_0$  à l'instant  $t = 0$  et notons  $x_p(t)$  et  $\vec{v}_p(t)$  respectivement sa position et sa vitesse au cours du temps. Le lien entre la « vitesse eulérienne »  $\vec{v}(M, t)$  et la « vitesse lagrangienne »  $\vec{v}_p(t)$  se

traduit par

$$\vec{v}(P(t), t) = \vec{v}_p(t) \quad \text{soit} \quad \frac{x_p}{\tau} = \frac{dx_p}{dt}$$

équation différentielle d'ordre un dont la solution s'écrit

$$x_p = x_0 e^{t/\tau} \quad \text{d'où} \quad v_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{x_0}{\tau} e^{t/\tau}$$

Comme on le voit, la vitesse de P varie au cours du temps bien que l'écoulement soit stationnaire.

Sur l'exemple précédent, on constate également que la trajectoire d'une particule se confond avec la ligne d'écoulement. Cette propriété se généralise pour tous les écoulements stationnaires.

### À retenir

En régime stationnaire, les trajectoires tracent les lignes d'écoulement.

## Accélération d'une particule

Supposons que l'on connaisse le champ de vitesse eulérien  $\vec{v}(M, t)$  et que l'on veuille déterminer l'accélération  $\vec{a}(M, t)$ , c'est-à-dire l'accélération d'une particule de fluide située à l'instant  $t$  au même point M.

La difficulté du calcul réside dans le fait que si une particule se situe en M à l'instant  $t$ , elle ne se situe plus au même point à l'instant  $t + \delta t$ . C'est pourquoi, on ne peut pas écrire  $\vec{a}(M, t) = \partial \vec{v}(M, t) / \partial t$ .

Considérons une particule P située en M(x, y, z) à l'instant  $t$ . Elle se trouve alors en M'(x + δx, y + δy, z + δz) à l'instant  $t + \delta t$ . Par définition, la particule présente une accélération

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(M', t + \delta t) - \vec{v}(M, t)}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) - \vec{v}(x, y, z, t)}{\delta t} \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor à l'ordre un, on obtient

$$\vec{v}(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) \underset{\delta t \rightarrow 0}{=} \vec{v}(x, y, z, t) + \delta x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \delta y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \delta t \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

De sorte que

$$\vec{a} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\delta x}{\delta t}}_{v_x} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\delta y}{\delta t}}_{v_y} \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\delta z}{\delta t}}_{v_z} \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Expression que l'on peut mettre sous forme compacte

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\vec{v} \cdot \nabla} \vec{v}$$

### Champ d'accélération

Si une particule de fluide présente un vecteur vitesse  $\vec{v}(M, t)$  lorsqu'il est en  $M$  à l'instant  $t$ , alors son accélération vaut

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (3.1)$$

Le premier terme est lié au caractère non permanent de l'écoulement alors que le second au fait que la particule, en se déplaçant, visite des endroits où la vitesse change. On l'appelle le **terme convectif**.

**Exercice** – On considère un écoulement dont le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v}(M, t) = \frac{x}{t+1} \vec{u}_x$$

- L'écoulement est-il stationnaire ?

### Dérivée particulaire

Nous venons de calculer le taux de variation du vecteur vitesse **lorsque l'on suit une particule**. Une telle grandeur est appelée **dérivée particulaire de la vitesse**. Nous la notons

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Le raisonnement effectuée pour la vitesse peut s'appliquer à toute grandeur physique  $G(M, t)$  attachée à une particule de fluide située en  $M$  à l'instant  $t$ . Lorsque l'on suit la particule, le taux de variation de la grandeur  $G$  vaut

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})G \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

### Techniques de visualisation

**Lignes d'écoulement** – On utilise des particules réfléchissantes que l'on photographie avec un court temps de pose. On a accès ainsi à des segments brillants qui donnent la direction du vecteur vitesse en différents points ce qui permet de reconstituer la carte du champ de vitesse.

**Lignes d'émission** – Courbe décrivant la position à un instant donné de l'ensemble des particules d'un fluide qui sont passées antérieurement en un même point donné. Expérimentalement on les visualise en émettant en continue un traceur en différents points et en prenant une photographie instantanée.

**Carte de densité** – La strioscopie est une technique interférométrique permettant d'accéder aux variations d'indice de réfraction et donc aux variations de densité.

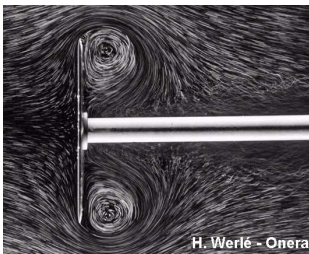


FIG. 3.3 : Visualisation des tourbillons derrière un obstacle plan.

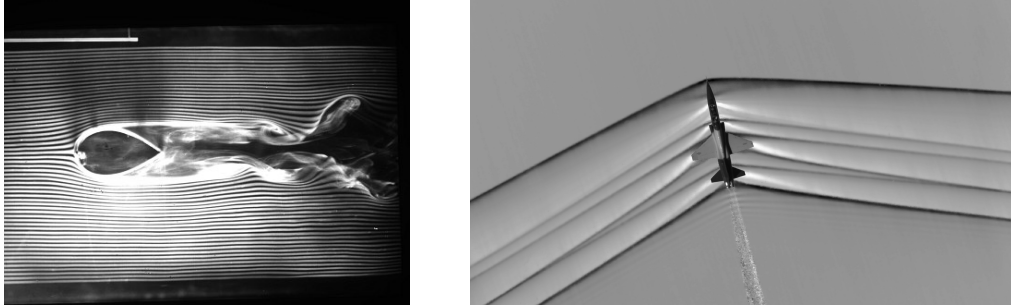


FIG. 3.4 : À gauche : lignes d'émission autour d'un corps fuselé à l'aide de la machine à fumées d'Etienne Marey. À droite : ondes de choc lors d'un vol supersonique visualisées par stroscope.

## 3.2 Conservation de la masse

### Débit massique

Un écoulement est un phénomène de transport puisqu'il se traduit par un transfert de masse. Et comme pour tout phénomène de transport, on est amené à définir la notion de flux et de courant.

Commençons par le flux de masse, que l'on appelle plus communément **débit massique**. Par définition, le débit massique, que l'on note  $D_m$ , est la masse qui traverse une surface par unité de temps. Plus précisément, si  $dm$  est la masse qui traverse la surface (S) entre  $t$  et  $t + dt$ , on a

$$dm = \frac{D_m}{(\text{kg} \cdot \text{s}^{-1})} dt \quad (\text{s}) \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

Le débit massique peut se calculer à l'aide d'une intégrale de surface<sup>2</sup> sous la forme

$$D_m = \iint_{(S)} \vec{j}_m \cdot \vec{n} \, dS \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

où  $\vec{j}_m$  désigne le vecteur **courant de masse**. Cherchons à exprimer le vecteur courant en fonction des caractéristiques du fluide en écoulement.

Pour cela, considérons une section infinitésimale  $dS$  autour d'un point M et calculons la masse  $d^2m$  de fluide traversant  $dS$  pendant  $dt$ . Cette masse se trouve dans le prisme de base  $dS$  et de génératrice  $\vec{v} dt$ . On a donc

$$\begin{aligned} d^2m &= \rho \times (dS \times v dt \cos \alpha) \\ &= \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dt dS \end{aligned}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la section  $dS$ . Pour une surface macroscopique (S), il suffit de sommer toutes les contributions :

$$dm = \left( \iint_{M \in (S)} \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} dS \right) dt$$

<sup>2</sup> : appelée aussi flux mathématique

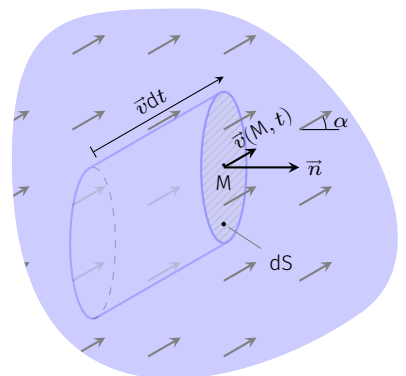


FIG. 3.5 : Calcul du débit massique.

On en déduit

$$D_m \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{(S)} \vec{j}_m(M, t) \cdot \vec{n} dS \quad \text{avec} \quad \vec{j}_m(M, t) = \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \quad \heartsuit \quad (3.5)$$

### Débit volumique

Divisons l'équation (3.1) par la masse volumique :

$$\frac{dm}{\rho} = dV = \frac{D_m}{\rho} dt$$

où  $dV$  représente le volume transportée pendant  $dt$ . On en déduit le débit volumique

$$D_V \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV}{dt} = \iint_{M \in (S)} \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} \, dS \quad \heartsuit \quad (3.6)$$

$m^3 \cdot s^{-1}$                        $m \cdot s^{-1}$                        $m^2$

Ainsi le flux du vecteur vitesse à travers une surface, donne le débit volumique qui le traverse.

### Équation de continuité

Établissons la première équation fondamentale de la mécanique des fluides. Il s'agit d'une contrainte imposée à  $\vec{v}(M, t)$  et  $\rho(M, t)$  qui traduit la conservation de la masse.

Prenons un volume de contrôle fixe ( $V$ ) dans un fluide, délimité par une surface ( $S$ ). Soit  $m(t)$  la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée à l'instant  $t$ . Par définition de la masse volumique,

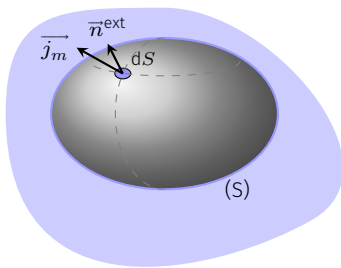


FIG. 3.6 : Calcul du débit massique sortant d'une surface fermée.

$$m(t) = \iiint_{M \in (V)} \rho(M, t) d\tau$$

Cette masse varie à cause du flux de matière à travers ( $S$ ) :

$$\frac{dm(t)}{dt} = -D_m^{\text{sortant}} = - \iint_{M \in (S)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS$$

où  $\vec{n}^{\text{ext}}$  est dirigé vers l'extérieur de la surface fermée ( $S$ ) ce qui explique l'origine du signe - devant l'intégrale. Or, on a également

$$\frac{dm(t)}{dt} = \iiint_{M \in V} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau$$

D'après le théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_{M \in (V)} \left[ \text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\tau = 0 \quad \forall V$$

d'où l'équation de conservation de la masse, dite aussi **équation de continuité**

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{partout et à chaque instant} \quad \heartsuit \quad (3.7)$$

### Théorème de Green-Ostrogradsky ou théorème de la divergence

Le flux d'un champ vectoriel  $\vec{A}(M)$  à travers une surface fermée ( $S$ ) est égal à l'intégrale sur le volume  $V$  limité par ( $S$ ) de la divergence du champ vectoriel.

$$\oint_{M \in (S)} \vec{A}(M) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_{M \in V} \operatorname{div}\vec{A}(M) d\tau$$

avec

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

**Exercice** – Que devient l'équation de continuité pour un liquide incompressible ?

## 3.3 Écoulement incompressible

### Dilatation d'une particule de fluide

La quantité  $\operatorname{div}(\vec{v})$  prend une signification bien précise en mécanique des fluides. Partons de la relation

$$\operatorname{div}(f\vec{A}) = f\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}f$$

Appliqué au vecteur densité de courant de matière  $\vec{J}_m = \rho\vec{v}$  cela donne

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \rho\operatorname{div}\vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho$$

En utilisant l'équation de continuité on obtient

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho = -\rho\operatorname{div}\vec{v}$$

On reconnaît dans le terme de gauche, la dérivée particulaire de  $\rho$ .

$$\operatorname{div}\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

Si l'on note  $\delta m$  et  $\delta\tau$  la masse et le volume d'une particule de fluide en mouvement on peut écrire

$$-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{D(\delta m / \delta\tau)}{Dt} = \frac{\delta m}{\rho\delta\tau^2} \frac{D\delta\tau}{Dt} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{D\delta\tau}{Dt}$$

Finalement, on obtient

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{D\delta\tau}{Dt} \quad \heartsuit \quad (3.8)$$

La divergence de la vitesse d'écoulement représente ainsi la vitesse de dilatation de la particule de fluide.

**Exemple 1 : écoulement unidimensionnel uniforme** – Considérons l'écoulement décrit par le champ de vitesse

$$\vec{v}(M, t) = v \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad v = C^{te}$$

Les lignes de courant sont des droites parallèles et l'écoulement est à divergence nulle. Les particules de fluide se déplacent sans se dilater comme le montre la FIG. 3.7.

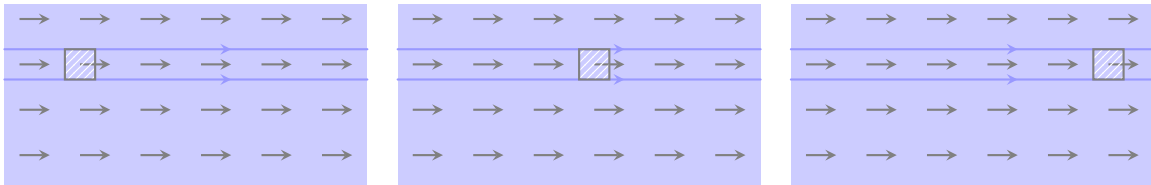


FIG. 3.7 : Particule de fluide dans un écoulement uniforme, capturé à différents instants.

**Exemple 2 : écoulement radial** – Considérons l'écoulement décrit en coordonnées polaires par le champ de vitesse

$$\vec{v}(M, t) = v \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad v = C^{te}$$

Les lignes de courant sont des droites issues de O et les particules de fluide se déplacent en se dilatant comme le montre la FIG. 3.8, ce qui prouve que l'écoulement est à divergence positive.

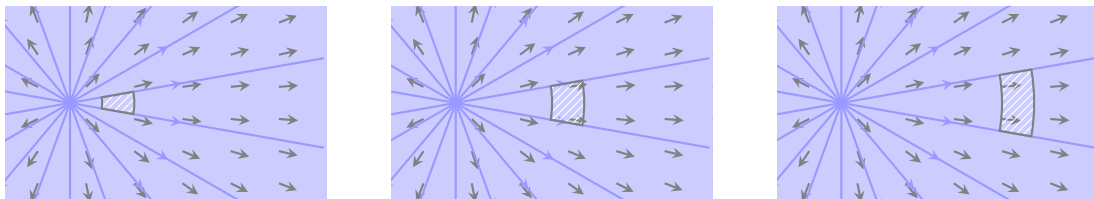


FIG. 3.8 : Particule de fluide dans un écoulement radial, capturé à différents instants.

### Conservation du débit volumique

#### Définition

Un fluide est en écoulement incompressible quand les particules de fluide se déplacent sans subir, ni dilatation, ni contraction. Donc,

$$\text{Écoulement incompressible} \Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0$$

Par conséquent, d'après le théorème de la divergence, un fluide en

écoulement incompressible vérifie la relation

$$\oint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iiint_{(V)} \text{div} \vec{v} d\tau = 0$$

la vitesse est à flux conservatif.

**Tube de courant** – Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe  $\mathcal{C}$  fermée constituent un *tube de courant*. Dans ce cas, la conservation du flux de vitesse s'exprime par

$$- \iint_{(S_1)} \vec{v} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \iint_{(S_2)} \vec{v} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS \quad \text{soit} \quad D_{V_1} = D_{V_2}$$

**Le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant.**

Si l'on définit la **vitesse moyenne dans la section  $S$**  par

$$\langle v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D_V}{S} \quad \heartsuit \quad (3.9)$$

On obtient

$$\langle v_1 \rangle S_1 = \langle v_2 \rangle S_2$$

Autrement dit, dans un tube de courant, **le resserrement des lignes de courant provoque une augmentation de la vitesse moyenne.**

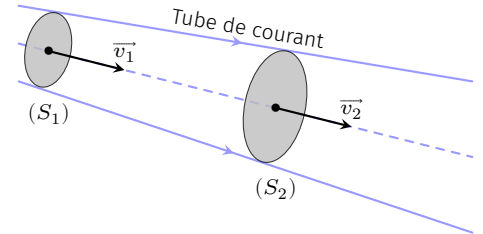


FIG. 3.9 : Tube de courant.



La dynamique des fluides relie l'écoulement d'un fluide aux actions qui lui sont appliquées. Ce chapitre se limite aux écoulements pour lesquels les couches de fluide glissent les unes sur les autres sans dissipation de chaleur. On parle alors de *fluide parfait*. On détaille particulièrement le cas des écoulements incompressibles et stationnaires.

Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/fluides-parfaits.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-parfaits.php)

## 4.1 Équations dynamiques

### Équation d'Euler

Supposons un fluide en écoulement dans un champ de forces extérieures que l'on sait exprimer. On admettra que :

- le fluide est en écoulement dans un référentiel galiléen<sup>1</sup>;
- le **fluide est parfait** : les forces internes se résument aux forces de pression<sup>2</sup>

Appliquons le Principe fondamentale de la dynamique à une particule de fluide située en  $M$  à l'instant  $t$ , et de masse  $dm = \rho(M, t) d\tau$ . Effectuons un bilan des forces.

- Forces extérieures :  $d\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{f}^{\text{ext}} d\tau$  avec  $f^{\text{ext}}$  en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ .
- Forces pressantes internes :  $d\vec{F}^{\text{int}} = -\vec{\nabla}p(M, t) d\tau$

La 2nde loi de Newton  $dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F}^{\text{ext}} + d\vec{F}^{\text{int}}$  donne

$$\rho(M, t) \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}p(M, t) + \vec{f}^{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

Cette relation est appelée **équation d'Euler**.

### Résolution de l'équation d'Euler

La relation (4.1) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On remarque qu'elle est non linéaire à cause de la présence du terme convectif  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ ; c'est ce qui rend les problèmes de mécanique des fluides mathématiquement redoutables...

Regardons si nous disposons d'assez d'équations pour traiter un problème de mécanique des fluides parfaits.

**Le fluide est incompressible** – Dans ce cas la masse volumique est fixée. Le problème présente donc 4 inconnues scalaires : le champ de

4.1 Équations dynamiques . . .	39
Équation d'Euler . . . . .	39
Résolution de l'équation d'Euler . . . . .	39
4.2 Écoulements incompressibles stationnaires . . .	40
Théorème de Bernoulli . . .	40
Interprétation énergétique . . .	41
Effet Venturi . . . . .	42
Formule de Torricelli . . . . .	43
Sonde de Pitot . . . . .	44
4.3 Écoulements potentiels . . .	45
Vorticité . . . . .	45
Écoulement potentiel . . . . .	47

1 : Si le référentiel n'est pas galiléen, il suffit d'ajouter dans le bilan des forces, les forces d'inertie.

2 : Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il y a en fait des forces de friction, dites forces de viscosité, que l'on néglige ici.

pression  $p(M, t)$  et le champ de vitesse  $\vec{v}(M, t)$  (3 composantes). Il faut donc 4 équations scalaires! L'équation d'Euler n'en donne que 3. La quatrième est donnée par l'équation de continuité  $\text{div}\vec{v} = 0$

**Le fluide est compressible** – La masse volumique peut varier sous l'effet de la pression mais aussi sous l'effet de la chaleur. En général le fluide possède une équation d'état locale  $\rho(p, T)$ . Le problème présente donc 6 inconnues scalaires : le champ de pression  $p(M, t)$ , les trois composantes du champ de vitesse  $\vec{v}(M, t)$ , la masse volumique  $\rho(M, t)$  et la température  $T(M, t)$ . Il faut donc 6 équations scalaires. L'équation d'Euler en donne 3, la quatrième est donnée par l'équation de continuité  $\text{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ , la cinquième par l'équation d'état du fluide  $\rho(p, T)$  et la dernière par le premier principe de la thermodynamique. Dans ce cas une bonne modélisation des transferts thermiques est nécessaire ce qui rend le problème très ardu. Par exemple, étudier une étoile ou la combustion d'une flamme nécessite ces 6 équations et surtout de gros ordinateurs...

L'équation d'Euler et de continuité sont des équations différentielles du premier ordre; leur intégration va donc produire des constantes d'intégration. On déterminera ces constantes d'intégration par les conditions aux interfaces (fluide1/fluide2 ou fluide/solide).

#### Conditions aux limites d'un fluide parfait

- Condition sur  $\vec{v}(M, t)$  : à la traversée d'une interface, la **composante normale de la vitesse** est continue.
- Condition sur  $p(M, t)$  : la pression est continue à la traversée d'une interface fluide-fluide<sup>3</sup>

3 : Condition valable si les effets de tension superficielle sont négligeables. Si tel n'est pas le cas, il faut utiliser la relation de Laplace qui relie la variation de pression entre deux interfaces en fonction de la courbure de l'interface et de la tension interfaciale.

## 4.2 Écoulements incompressibles stationnaires

### Théorème de Bernoulli

Ce théorème fut énoncé en premier par Daniel Bernoulli, en 1738.

**Hypothèses** – Le théorème de Bernoulli dans sa formulation classique ne s'applique qu'aux **écoulements stationnaires incompressibles et sans viscosité**. Détaillons :

- Le fluide est parfait; il obéit donc à l'équation d'Euler.
- L'écoulement est stationnaire.  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$  et les trajectoires s'identifient aux lignes de courant.
- L'écoulement est également incompressible. Le long d'une trajectoire  $\rho$  reste constant.
- De plus, nous supposons que les forces volumiques extérieures se résument à la pesanteur. Si l'on munit l'espace d'un axe  $Oz$  vertical ascendant, on a

$$\vec{f}^{\text{ext}} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{u}_z = -\rho \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$



Fig. 4.1 : Daniel Bernoulli (1700 - 1782) : médecin, physicien et mathématicien suisse. Il publia en 1738 son ouvrage *Hydrodynamica* dans lequel il expose le théorème fondamental de la mécanique des fluides qui porte son nom.

L'équation d'Euler devient donc

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla}(gz)$$

L'identité<sup>4</sup>  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}$  permet de réécrire l'équation :

$$\rho (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla}(gz) - \rho \vec{\nabla} \frac{v^2}{2}$$

Intégrons cette équation **le long d'une ligne de courant** entre deux points A et B :

$$\int_A^B \rho \underbrace{[(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}] \cdot \vec{d\ell}}_{\perp \vec{v}} = - \int_A^B \vec{\nabla} \left( p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{d\ell}$$

Le premier membre est nul puisque  $\vec{d\ell} \parallel \vec{v}$ . Le second membre s'écrit

$$- \int_A^B d \left( p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2} \right) = \left( p_A + \rho gz_A + \rho \frac{v_A^2}{2} \right) - \left( p_B + \rho gz_B + \rho \frac{v_B^2}{2} \right)$$

In fine, on aboutit à la relation

$$p_A + \rho gz_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = p_B + \rho gz_B + \rho \frac{v_B^2}{2}$$

4 : cf. Annexe B.

Rappelons que le long d'une trajectoire (qui se confond ici avec une ligne de courant), la masse volumique conserve une valeur constante puisque l'écoulement est incompressible.

### Théorème de Bernoulli (1738)

Pour un écoulement incompressible et permanent d'un fluide parfait dans le champ de pesanteur, la quantité

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz = C^{\text{te}} \quad \text{le long d'une ligne de courant} \quad (4.2)$$

**NB** : d'une ligne de courant à l'autre, c'est la valeur de la constante qui change.

Attention, l'axe Oz doit être ascendant!

### Interprétation énergétique

La conservation de la quantité  $p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz$  exprime la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant.

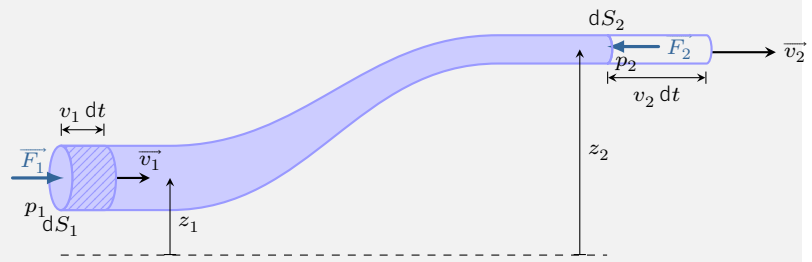
- $\rho \frac{v^2}{2}$  représente l'énergie cinétique volumique;
- $\rho gz$  l'énergie potentielle volumique de pesanteur;
- et la pression  $p$  représente l'énergie potentielle volumique associée aux forces de pression.

### Démonstration

Considérons un fluide incompressible en écoulement permanent plongé dans un champ de pesanteur. Considérons, un filet de fluide de section infinitésimale, et appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre deux

instants voisins  $t$  et  $t + dt$  :

$$d\mathcal{E}_c = \delta W$$



À un instant  $t$  le système étudié est une portion du tube de courant compris entre les sections  $dS_1(t)$  et  $dS_2(t)$ . À l'instant  $t + dt$  la section  $dS_1(t)$  s'est déplacée de  $v_1 dt$  et la section  $dS_2(t)$  de  $v_2 dt$ . Chaque surface balaye le même volume  $d\tau$  car le fluide est incompressible :

$$d\tau = v_1 dS_1 dt = v_2 dS_2 dt$$

Commençons par exprimer l'énergie cinétique du système :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \rho d\tau v_1^2 + \mathcal{E}_c^0(t)$$

où  $\mathcal{E}_c^0(t)$  désigne l'énergie cinétique de la portion de fluide autre que le volume  $d\tau$ . De même, à l'instant  $t + dt$ , on a

$$\mathcal{E}_c(t + dt) = \mathcal{E}_c^0(t + dt) + \frac{1}{2} \rho d\tau v_2^2$$

Supposons l'écoulement stationnaire. Dans ce cas  $\mathcal{E}_c^0(t) = \mathcal{E}_c^0(t + dt)$  et l'on aboutit à

$$d\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \rho d\tau (v_2^2 - v_1^2)$$

Quant au travail mécanique, il se résume à deux termes :

1. le travail de pesanteur  $\delta W_g = -d\mathcal{E}_p = -\rho d\tau g(z_2 - z_1)$ .
2. le travail des forces de pression  $\delta W_p = -p^{\text{ext}} dV = (p_1 - p_2) d\tau$

Notez qu'il n'y a pas de travail des forces internes pour deux raisons :

1. au sein du système, les forces de pression ne peuvent ni dilater ni comprimer les particules de fluide car l'écoulement est incompressible;
2. les forces de friction dues à la viscosité sont négligés ici puisque l'on traite le cas d'un fluide parfait.

Le théorème de l'énergie cinétique donne finalement

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2$$

On obtient la relation de Bernoulli, montrant ainsi qu'elle exprime tout simplement la conservation de l'énergie mécanique.

## Effet Venturi

Dans un tube horizontal de section  $S$  variable, l'écoulement d'un fluide en écoulement incompressible et permanent s'accompagne d'une dépression là où il y a rétrécissement : c'est l'*effet Venturi*.

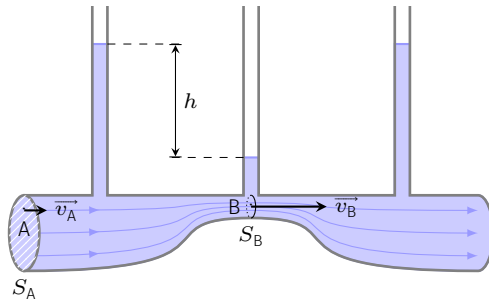


FIG. 4.2 : Effet venturi

**Explications** – Le long d'un tube horizontal, d'après la conservation du débit on a

$$D_V = v_A S_A = v_B S_B$$

Ainsi, la conservation du débit impose une augmentation de vitesse là où il y a rétrécissement. Le théorème de Bernoulli impose

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + p_A + \rho g z_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + p_B + \rho g z_B$$

Il existe alors une dépression au niveau du rétrécissement donnée par

$$p_B - p_A = \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2) < 0$$

Cet effet peut être mis à profit pour les applications suivantes :

- Mesure de débit (débitmètre à effet venturi);
- Principe des trompes à eau montées sur les robinet des paillasses de chimie;
- Douchette venturi produisant une économie d'eau;
- Amélioration du tirage d'une cheminée, principe du carburateur, vaporisateur, etc.

**Exercice** – Montrer que la hauteur manométrique  $h$  de la FIG. 4.2 s'écrit  $h = K D_V^2$  où  $K$  est un facteur géométrique que l'on exprimera.

## Formule de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Torricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur de liquide  $h$ . On fera les hypothèses suivantes :

- La section  $S$  du cylindre est très grande devant la section de l'orifice :  $s \ll S$ ;
- On considère le liquide incompressible et parfait;
- Enfin, on considère que l'écoulement est en régime stationnaire.

On cherche à calculer la vitesse d'écoulement  $v(B, t)$  à la sortie du trou. L'application du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant donne :

$$p_{\text{atm}} + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2(A, t) = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho v^2(B, t)$$

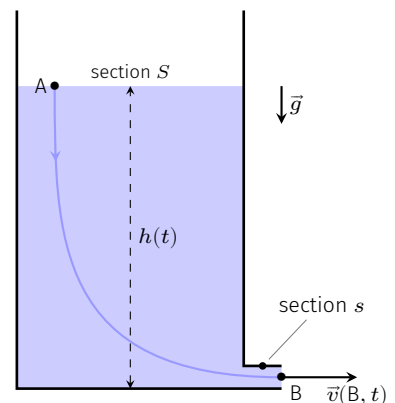


FIG. 4.3 : Vidange d'un récipient.

Or, la conservation du débit volumique donne

$$v(A, t) S = v(B, t) s$$

d'où  $v(A, t) \ll v(B, t)$  car  $s \ll S$ . Finalement

$$v(B, t) = \sqrt{2gh(t)} \quad [\text{formule de Torricelli}] \quad \heartsuit \quad (4.3)$$

On peut noter que la vitesse du jet sortant dépend du temps ce qui montre que l'écoulement n'est pas rigoureusement stationnaire. On peut cependant montrer que  $\partial \vec{v} / \partial t$  est négligeable si  $s \ll S$ . On parle d'écoulement quasi-stationnaire.

La vitesse a la même expression que celle de la chute libre d'un point matériel dans le champ de pesanteur.

Cherchons à déterminer le temps de vidange  $T$ . Pour cela, reprenons la conservation du débit volumique :

$$D_V = s \sqrt{2gh(t)} = S v(A, t) \quad \text{d'où} \quad v(A, t) = \frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)}$$

Par ailleurs, le point A situé sur la surface libre a pour cote  $z = h(t)$  d'où une vitesse  $\vec{v}_A = \frac{dh}{dt} \vec{u}_z$ . On a donc

$$v(A, t) = -\frac{dh}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2gh}$$

Attention aux signes. La vitesse en A a pour norme  $v_A = |\dot{h}| = -\dot{h}$ , car  $h(t)$  décroît.

Il s'agit d'une équation différentielle que l'on peut résoudre en séparant les variables :

$$\int_{h_0}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s\sqrt{2g}}{S} \int_0^T dt$$

où  $h_0$  désigne la hauteur initiale du liquide. On obtient le résultat suivant :

$$T = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

En pratique, le jet de sortie est contracté de sorte que la section effective de sortie  $s$  est légèrement plus petite que la section de l'orifice.

## Sonde de Pitot

5 : On parle souvent de *tube de Pitot*.

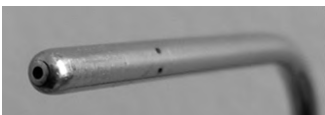


FIG. 4.4 : Sonde de Pitot statique dite aussi sonde de Prandtl.

La sonde de Pitot fut inventé en 1732 par l'ingénieur français Henri Pitot. Il s'agit d'un tube<sup>5</sup> destiné à mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide; il est largement employé dans le génie chimique et en aéronautique sous une version améliorée que l'on appelle sonde de Prandtl.

La sonde est constituée d'un tube de diamètre  $d$  au bout arrondi et percée d'un trou cylindrique parallèle au tube. Sur la face latérale du tube à une distance de l'ordre de  $3d$  se situe une ou plusieurs prises de pression. On place cette sonde parallèlement à un écoulement de fluide et l'on mesure la différence de pression entre les pressions axiale et latérale.

6 : Pour les gaz, l'approximation est justifiée si l'écoulement est subsonique ( $v \ll c_{\text{son}}$ )

Admettons que le fluide soit en écoulement stationnaire et incompressible<sup>6</sup>. Le point A est un *point d'arrêt* car la vitesse est nulle (il n'

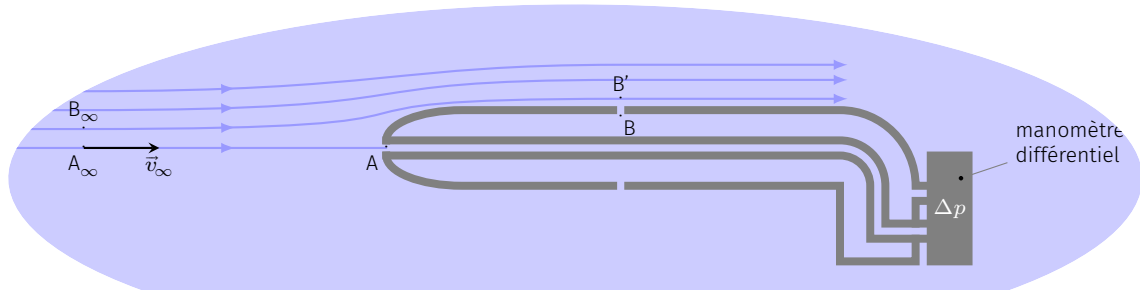


FIG. 4.5 : Principe de la sonde de Pitot statique.

Il n'y a pas d'écoulement dans l'orifice, c'est juste une prise de pression). Le théorème de Bernoulli appliqué entre  $A_\infty$  et A donne

$$p_A = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2$$

Le même théorème appliqué entre  $B_\infty$  et B' donne

$$p_{B'} = p_\infty + \frac{1}{2}\rho (v_\infty^2 - v_{B'}^2)$$

Par ailleurs, si l'on admet que l'écoulement est parallèle autour de la sonde, alors il en découle

$$p_B = p_{B'}$$

ce qui conduit à

$$\Delta p = p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho v_{B'}^2$$

La différence de pression indiquée par le manomètre permet de remonter à la vitesse en B'. De surcroît si l'on suppose que la section du tube de Pitot est suffisamment faible devant la section du tube de courant pour ne pas influencer la vitesse d'écoulement alors on a  $v_{B'} = v_\infty$ .

**Exercice** – Un tube de Pitot dans un écoulement d'air mesure une différence de pression  $\Delta P = 0,6$  mbar. Quelle est la vitesse d'écoulement ?

Rép. 10 m/s.

#### À retenir

Quand un fluide parfait ou visqueux présente un écoulement parallèle, la pression obéit aux lois de la statique dans une direction perpendiculaire à l'écoulement.

## 4.3 Écoulements potentiels

### Vorticité

On appelle *vorticité* le rotationnel de la vitesse. Il s'agit d'un vecteur qui se note  $\vec{\omega}$  :

$$\vec{\omega}(M, t) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(M, t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}(M, t) \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

À l'instar des lignes de courant, on définit les lignes de vorticité comme les lignes du champ vectoriel  $\vec{\omega}(M, t)$ .

**Exemple**

Considérons l'écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v}(M, t) = -k y \vec{u}_x + k x \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = \text{C}^{\text{te}}$$

Tout d'abord, on constate que

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial(-k y)}{\partial x} + \frac{\partial(k x)}{\partial y} = 0$$

Il s'agit donc d'un écoulement incompressible. La vorticité de cet écoulement est donnée par

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -ky \\ kx \\ 0 \end{pmatrix} = 2k \vec{u}_z$$

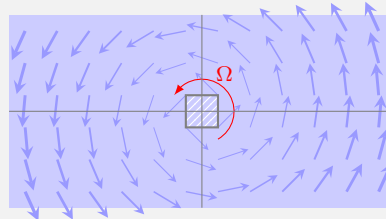
Cet écoulement pr esente donc une vorticité uniforme.

La vorticité a une signification cinématique simple : elle donne le double du vecteur rotation local des particules de fluide. Ce vecteur, noté  $\vec{\Omega}$ , est parfois appelé *vecteur tourbillon*.

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

**Exemple**

Reprenons l'exemple pr ec dent et plaçons une particule carrée d'arête  $2a$  en O. Quel est son mouvement ?



On a vu qu'au cours de l'écoulement, cette particule conserve son aire puisque  $\text{div } \vec{v} = \vec{0}$ . Sur la simulation ci-dessus on constate que les sommets sont animés d'une vitesse orthoradiale de sorte que la particule tourne autour de O. La vitesse d'un sommet vaut  $v = \sqrt{2}k a$ , d'où une vitesse angulaire de rotation  $\Omega = k = \frac{1}{2} \|\vec{\omega}\|$ .

Si l'on prend le rotationnel de l'équation d'Euler, on obtient l'équation d'évolution de la vorticité. Dans le cas d'un fluide incompressible siège d'un champ de force extérieur conservatif, on aboutit à l'équation

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\omega})$$

En conséquence, si un fluide parfait est irrotationnel à un instant donné ( $\vec{\omega}(M, t_0) = \vec{0}$  partout), alors il le reste aux instants ultérieurs ( $\partial \vec{\omega} / \partial t = \vec{0}$  pour  $t > t_0$ ).

## Écoulement potentiel

Le phénomène de viscosité – absent ici – est source de vorticité dans le sillage des obstacles et dans une couche, dite *couche limite*. Mais en général, en dehors de ces zones le fluide peut être traité comme un fluide parfait. Et si en plus l'écoulement est initialement irrotationnel, alors il le restera ultérieurement. C'est pourquoi ce type d'écoulement revêt une certaine importance en dynamique des fluides.

Lorsque  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , le champ de vitesse s'écrit nécessairement comme un gradient. On dit qu'il dérive d'un potentiel des vitesses  $\varphi(M, t)$  :

$$\overline{\text{rot}} \vec{v}(M, t) = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{v}(M, t) = \overline{\text{grad}} \varphi(M, t)$$

C'est pourquoi, on parle dans ce cas d'écoulement **irrotationnel ou potentiel**. Dans ces conditions, l'équation d'Euler devient

$$\rho(M, t) \left[ \frac{\partial \overline{\text{grad}} \varphi}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = -\overline{\nabla} p(M, t) + \vec{f}^{\text{ext}}$$

Si l'on suppose en plus le fluide incompressible dans un champ de force conservatif d'énergie potentielle volumique  $e_p^{\text{ext}}$ , on aboutit à

$$\overline{\text{grad}} \left[ \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 + e_p^{\text{ext}} + p \right] = \vec{0}$$

soit, après intégration :

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v^2 + e_p^{\text{ext}} + p = f(t) \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

où  $f(t)$  est une fonction arbitraire du temps. Notons que le potentiel des vitesses est indéterminée : si  $\varphi(M, t)$  convient, alors  $\varphi(M, t) + g(t)$  convient aussi, de sorte que l'on peut toujours choisir le potentiel des vitesses de sorte que  $f(t) = 0$ .

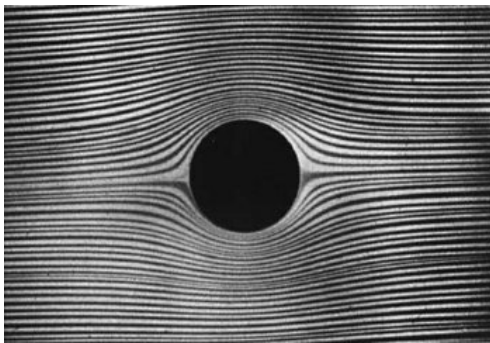


FIG. 4.6 :  coulement potentiel d'un fluide à la vitesse d'un millimètre par seconde autour d'un obstacle cylindrique. L'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel.

Bien entendu, dans le cas d'un écoulement stationnaire,  $\varphi$  ne dépend plus explicitement du temps, et l'on retrouve la relation de Bernoulli :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + e_p^{\text{ext}} + p = C^{\text{te}}$$

  une nuance près : la constante est la même pour toutes les lignes d'écoulement.



# FLUIDES VISQUEUX 5

Nous avons vu au chapitre précédent que dans un fluide parfait, la contrainte qui s'exerce sur une particule de fluide est toujours perpendiculaire aux parois de celle-ci. Dans un fluide réel en écoulement, la contrainte possède aussi une composante tangentielle dite **contrainte visqueuse**. Sa prise en compte permet d'établir l'équation de Navier-Stokes qui représente une version améliorée de l'équation d'Euler pour un fluide réel.

## Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/fluides-visqueux.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-visqueux.php)

5.1 Notion de viscosité . . . . .	49
Expérience de Couette . . . . .	49
Fluide newtonien . . . . .	50
Rhéologie . . . . .	51
5.2 Dynamique des écoulements visqueux incompressibles . . . . .	51
Force volumique visqueuse	52
Équation de Navier-Stokes	52
Le nombre de Reynolds . . . . .	53

## 5.1 Notion de viscosité

### Expérience de Couette

Considérons un fluide enfermé entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé *via* un fil de torsion de constante de torsion  $C$  (en  $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ ). L'ensemble forme ce qu'on appelle un *rhéomètre*. On constate que lorsque la cavité cylindrique extérieure est mise en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$ , le cylindre intérieur tourne d'un angle  $\theta$  par rapport à sa position d'équilibre.

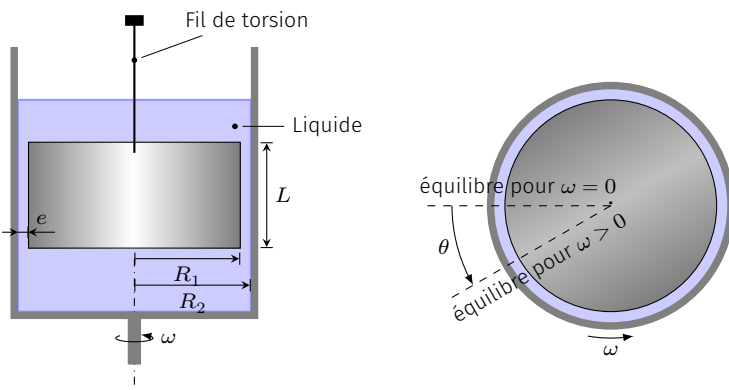


FIG. 5.1 : Rhéomètre de Couette. À gauche, vue de profil. À droite, vue de dessus.

Ce que l'on observe :

- Les particules de fluide adhèrent aux parois. Il existe donc un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.
- Plus la vitesse angulaire  $\omega$  est importante, plus l'angle de torsion  $\theta$  l'est aussi.
- Pour les fluides simples, cette relation est linéaire.

Conséquences :

- La torsion du fil conduit à l'existence d'un couple produit par le fluide. Ce couple, noté  $\mathcal{M}_\Delta$  équilibre le couple de torsion  $-C\theta$  de sorte que  $\mathcal{M}_\Delta = C\theta$ .

- Les forces de pression ne peuvent pas expliquer ces actions. On est donc obligé d'admettre l'existence d'efforts tangentiels. On définit la **contrainte tangentielle**  $\vec{\sigma}_t$  qui s'applique sur un élément de surface  $dS$  par

$$\begin{aligned} \overline{dF}_t &= \vec{\sigma}_t \times dS \\ N &= \text{Pa} \times \text{m}^2 \end{aligned} \quad \heartsuit \quad (5.1)$$

- Ces forces dépendent du *gradient de vitesse* qui règne au sein du rhéomètre. Ce gradient de vitesse, aussi appelé *vitesse de cisaillement*, est noté  $\dot{\gamma}$ .

Le rhéomètre permet de mesurer la contrainte  $\sigma_t$  et la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  grâce à la mesure de l'angle de torsion  $\theta$  et la vitesse angulaire  $\omega$ . En effet, on a

$$\sigma_t = \frac{M_{\Delta}/R_1}{S_{\text{lat}}} = \frac{C\theta}{2\pi LR_1^2} \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = \frac{\Delta v}{\Delta R} = \frac{R_2\omega}{R_2 - R_1}$$

La courbe  $\sigma_t = f(\dot{\gamma})$  est appelée **rhéogramme** et décrit le comportement dynamique du liquide en écoulement.

## Fluide newtonien

### Définition

Un fluide est newtonien quand la contrainte visqueuse est proportionnelle à la vitesse de cisaillement :

$$\sigma_t = \eta \dot{\gamma} \quad (5.2)$$

avec  $\eta$  une constante appelée **viscosité dynamique**.

1 : **Jean-Louis Marie Poiseuille** (1797–1869) fut élève de l'École Polytechnique avant d'étudier la médecine. Les recherches de Poiseuille ont porté principalement sur l'hémodynamique, c'est-à-dire l'étude de la circulation sanguine et lui ont permis de dégager une loi sur l'écoulement des fluides visqueux dans des tubes capillaires.

Liquide (20 °C)	Viscosité (Pa.s)
Acétone	$3,2 \times 10^{-4}$
Eau	$1,0 \times 10^{-3}$
Mercure	$1,5 \times 10^{-3}$
Huile d'olive	0,84
Glycérine pure	1,5
Gaz	Viscosité (Pa.s)
Vapeur d'eau (20 °C)	$9,7 \times 10^{-6}$
Air sec (20 °C)	$18,2 \times 10^{-6}$
He (25 °C)	$19,9 \times 10^{-6}$
N <sub>2</sub> (25 °C)	$17,7 \times 10^{-6}$

TAB. 5.1 : Quelques valeurs de viscosité.

L'analyse dimensionnelle de la relation (5.2) donne

$$[\eta] = \frac{[F]}{L^2} \frac{L}{[v]} = \frac{[F]}{L^2} T$$

Ainsi, la viscosité est homogène à une pression  $\times$  temps. On l'exprime indifféremment en **pascal.seconde** (Pa.s) ou en **poiseuille** (Pl) en hommage à Jean-Louis Marie Poiseuille<sup>1</sup>.

**Ordre de grandeur** – Tous les gaz sont des fluides newtoniens avec une viscosité de l'ordre de  $1 \times 10^{-5}$  Pa.s dans les conditions normales. Elle varie peu avec la température. Quant aux liquides, la viscosité varie sur plusieurs ordres de grandeurs (TAB. 5.1) et reste très sensible à la température (elle diminue lorsque la température augmente).

Pour résumer, au sein d'un fluide newtonien, il existe deux types d'actions de contact :

- les actions pressantes dont les contraintes sont normales :

$$\vec{\sigma}_n = \frac{d\vec{F}_n}{dS} = -p \vec{n}$$

Rappelons que ses forces sont conservatives.

- les actions visqueuses dont les contraintes sont tangentiellles

$$\vec{\sigma}_t = \frac{dF_t}{dS} = \eta \frac{\partial v}{\partial n} \vec{t}$$

où  $\partial v / \partial n$  désigne le gradient de vitesse dans la direction normale à la surface. Ces forces sont dissipatives.

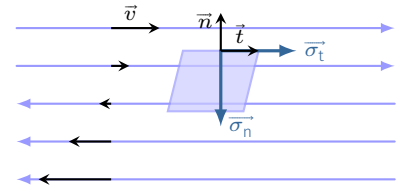


FIG. 5.2 : Contraintes internes dans le fluide.

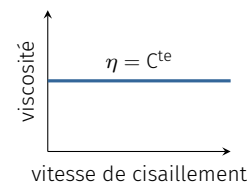
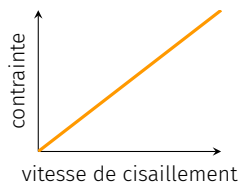
## Rhéologie

La rhéologie est la science qui étudie le comportement des fluides en écoulement. Cette science repose sur l'emploi de *rhéomètres*<sup>2</sup>, appareils destinés à mesurer la relation entre la contrainte tangentielle  $\sigma_t$  et la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Le comportement newtonien s'observe dans tous les gaz et dans les liquides simples constitués de petites molécules (l'eau par exemple).

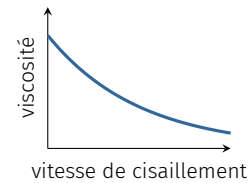
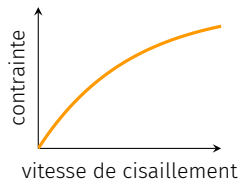
2 : On dit aussi viscosimètres.

Toutefois, certains liquides ont des comportements rhéologiques qui s'écartent du comportement newtonien. La FIG. 5.3 en donnent quelques exemples.

**Fluide Newtonien**  
Exemples : Eau, huiles, Gaz...



**Fluide Pseudoplastique**  
Exemples : Peintures, vernis, produits cosmétiques, sang, suspensions minérales...



**Fluide plastique (à seuil)**  
Exemples : pate dentifrice, chocolat, moutarde, graisse, suspensions d'argile...

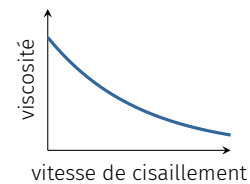
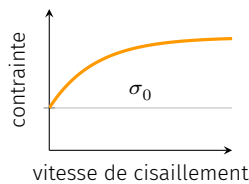


FIG. 5.3 : Différents comportements rhéologiques.

## 5.2 Dynamique des écoulements visqueux incompressibles

Lorsque le fluide est newtonien et incompressible, les équations de Newton appliquées à chaque particule de fluide prennent la forme des équations de Navier-Stokes.

### Force volumique visqueuse

Plaçons nous dans un référentiel galiléen et effectuons un bilan des forces sur une particule de fluide située en M à l'instant t, de masse  $dm = \rho(M, t) d\tau$ . En plus des forces de pression et des forces extérieures volumiques, il faut ajouter la résultante des forces visqueuses :

$$d\vec{F} = (\vec{f}^{\text{ext}} - \vec{\nabla}p) d\tau + d\vec{F}_\eta$$

L'expression de  $d\vec{F}_\eta$  est en général assez compliquée mais elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles.

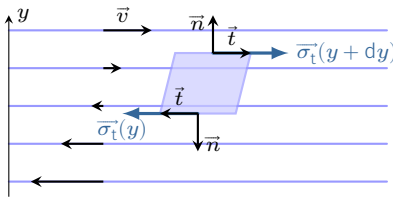


FIG. 5.4 : Bilan des forces de viscosité sur un élément de fluide.

**Cas d'un écoulement parallèle unidimensionnel** – Calculons la résultante des forces visqueuses dans le cas particulier simple d'un écoulement suivant (Ox) avec un gradient de vitesse suivant (Oy) :

$$\vec{v} = v(y) \vec{u}_x$$

On remarque ici que  $\text{div}\vec{v} = 0$ . L'écoulement est donc bien incompressible. Dans ce cas, la résultante des forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide, s'écrit :

$$d\vec{F}_\eta = \eta \left[ \frac{dv}{dy}(y+dy) - \frac{dv}{dy}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{d^2v}{dy^2} d\tau$$

On voit apparaître une force volumique qui s'exprime comme le laplacien de la vitesse. Cette formule obtenue dans un cas particulier se généralise aux écoulements incompressibles des fluides newtoniens. On admettra que pour un *fluide newtonien incompressible*, la résultante des forces visqueuses s'écrit

$$d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau = \eta \left( \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right) d\tau \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.

### Équation de Navier-Stokes

Appliquons la seconde loi de Newton à une particule de fluide :

$$\rho d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{-\vec{\nabla}p d\tau}_{\text{pression}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{v} d\tau}_{\text{viscosité}} + \underbrace{\vec{f}^{\text{ext}} d\tau}_{\text{autres}}$$

En divisant par  $d\tau$ , on obtient l'équation de Navier-Stokes.

#### Équation de Navier-Stokes

Pour un fluide incompressible newtonien, la dynamique de l'écoulement vérifie l'équation

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}p + \vec{f}^{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v} \quad (5.4)$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et non linéaire. Cette équation recèle encore quelques mystères qui résistent à la sagacité de nos meilleurs mathématiciens puisque l'**existence et l'unicité** d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est l'un des 7 problèmes du millénaire mis à prix \$ 1 000 000 par l'Institut Clay<sup>3</sup>!

<sup>3</sup> : Voir <http://www.claymath.org/millennium-problems/navier-stokes-equation>

**Conditions aux limites** – L'équation de Navier-Stokes étant une équation aux dérivées partielles, sa résolution introduit des constantes d'intégration. On les détermine en appliquant les conditions aux limites suivantes :

- continuité de la vitesse à la traversée d'une interface (adhérence);
- continuité de la pression si la surface est plane;
- continuité de la contrainte tangentielle.

## Le nombre de Reynolds

La complexité provient essentiellement de la présence, dans l'équation de Navier-Stokes, d'un *terme non linéaire* – le terme d'inertie – et d'un *terme du second ordre* – le terme de viscosité.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\text{inertie}} = -\nabla p + \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\text{viscosité}} + \vec{f}^{\text{ext}}$$

Dans de nombreux cas, on peut négliger l'un des deux termes devant l'autre. On définit alors un facteur sans dimension, qui estime l'importance du terme d'inertie devant le terme de viscosité. On peut estimer l'ordre de grandeur de ces termes à partir de la masse volumique  $\rho$  du fluide, de sa viscosité  $\eta$ , d'une vitesse caractéristique de l'écoulement  $v$  et d'une distance  $d$  qui caractérise l'échelle de variation de la vitesse. En effet,

$$\|\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}\| \sim \rho \frac{v^2}{d} \quad \text{et} \quad \|\eta \Delta \vec{v}\| \sim \eta \frac{v}{d^2}$$

D'où le nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds**

$$R_e = \frac{\text{terme d'inertie}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\rho v d}{\eta} \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

Ce nombre joue un rôle très important en mécanique des fluides car il permet de distinguer trois types d'écoulement.

- **L'écoulement à petit nombre de Reynolds**  $R_e \ll 1$  – L'écoulement est laminaire et essentiellement gouverné par la viscosité. Le terme d'inertie est négligeable et l'équation de Navier-Stokes devient

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \vec{f}^{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

équation qui a le bon goût d'être linéaire. Si l'écoulement est permanent, on obtient le régime de Stokes.

- **L'écoulement à grand nombre de Reynolds**  $R_e \gg 1$  – On montre dans ce cas que les effets visqueux sont concentrés sur les

bords, dans une fine couche appelée *couche limite*, et dans le sillage des obstacles. Hors de ces zones, le terme visqueux est négligeable et l'on retrouve l'équation d'Euler

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \vec{f}^{\text{ext}}$$

- **Écoulement turbulent** – La viscosité stabilise et régularise les écoulements de façon générale. Ainsi, quand le nombre de Reynolds augmente le régime laminaire devient instable voire turbulent. La transition entre le régime laminaire et turbulent se produit dans une certaine gamme de valeur du nombre de Reynolds qui dépend du problème. On peut retenir qu'en général, lorsque  $R_e \gtrsim 10^3 - 10^4$ , l'écoulement devient turbulent : la vitesse en un point M varie dans le temps de façon erratique. Dans ce cas, le problème étant analytiquement insoluble, on utilise souvent des lois phénoménologiques associées à une analyse dimensionnelle.

**TAB. 5.2 :** Quelques ordres de grandeur du nombre de Reynolds.

Type d'écoulement	Nombre de Reynolds	Régime
Écoulement atmosphérique	$R_e \approx 10^{11}$	turbulent
Écoulement sanguin dans l'aorte	$R_e \approx 10^4$	turbulent
Écoulement sanguin dans les capillaires	$R_e \approx 10^{-3}$	laminaire visqueux
Domaine de l'aéronautique	$R_e \approx 10^7$	turbulent
Domaine de la microfluidique	$R_e \approx 10^{-3} - 1$	laminaire visqueux

**Exercice** – De l'eau ( $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) à  $20^\circ\text{C}$  et  $1 \times 10^5 \text{ Pa}$  coule dans une canalisation de diamètre  $d = 1 \text{ cm}$  avec un débit  $D_V = 10 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ . Calculer le nombre de Reynolds.

Nous abordons dans ce chapitre deux conséquences aux caractères visqueux de la plupart des fluides : l'existence de pertes de charge dans les canalisations et, la résistance au mouvement d'un corps dans un fluide.

### Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/fluides-visqueux.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-visqueux.php)

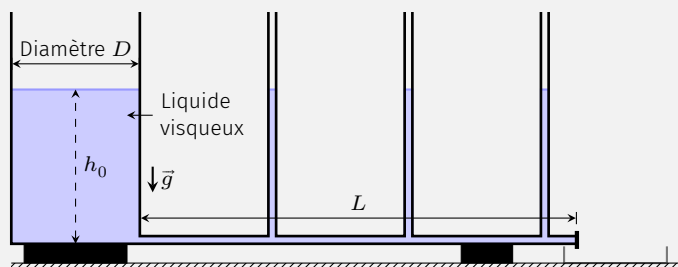
## 6.1 Pertes de charge dans une conduite

### Observations expérimentales

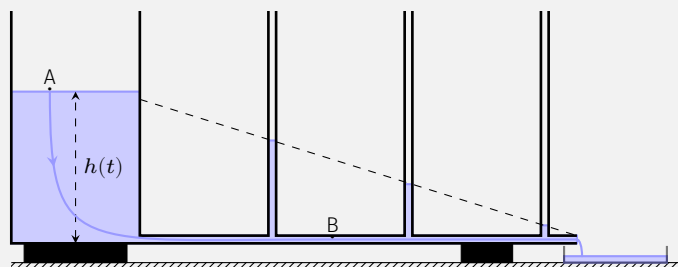
#### Expérience

Considérons un récipient de diamètre  $D$  dans lequel on branche un tube horizontal de diamètre  $d \ll D$ . Ce tube dispose de 3 tubes verticaux en contact avec l'air.

Dans un premier temps, on bouche la sortie du tube horizontal et on remplit le récipient d'un fluide. On observe ceci :



Dans un deuxième temps, on ouvre le tube horizontal : le niveau d'eau descend lentement, mais la hauteur des colonnes d'eau diffère d'un tube à l'autre.



**Analyse** – Lorsque la sortie du tuyau est obturée, le liquide est en équilibre hydrostatique. La pression dans le tuyau est uniforme et vaut  $p_{\text{atm}} + \rho g h_0$ . Lorsque le liquide coule, les colonnes d'eau verticales sont en quasi-équilibre (le niveau descend très lentement) de sorte que la hauteur d'eau nous renseigne sur la pression qui règne

6.1 Pertes de charge . . . . .	55
Observations expérimentales . . . . .	55
Écoulement de Poiseuille . . . . .	56
Loi de Poiseuille . . . . .	57
Analogie électrique . . . . .	58
Formule générale . . . . .	58
Pertes de charge singulière . . . . .	60
Th. de Bernoulli généralisé . . . . .	61
6.2 Résistance au mouvement . . . . .	63
Formule de Stokes . . . . .	63
Coefficient de traînée $C_x$ . . . . .	64

dans le tuyau. On en déduit que **la pression diminue le long de la canalisation**. On dit qu'il y a une **perte de charge en ligne**.

Ce résultat est en contradiction avec le théorème de Bernoulli. En effet, si on l'applique entre le point A situé à la surface libre du large récipient, et un point B situé dans la canalisation, on obtient

$$p_B = p_{\text{atm}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)}_{f(t)} + \rho gh(t)$$

On prévoit donc que la pression en B dépend du temps mais *pas de sa position*, puisque  $h$ ,  $v_A = -\dot{h}$  et  $v_B = v_A(d^2/D^2)$  ne dépendent que du temps. Ce qui est en contradiction avec nos observations. On en déduit que l'on ne peut pas appliquer le théorème de Bernoulli, car l'on ne peut pas considérer le fluide parfait : c'est la viscosité du fluide qui explique le phénomène de perte de charge.

## Écoulement de Poiseuille

Cherchons tout d'abord à caractériser l'écoulement qui s'établit le long d'une conduite cylindrique horizontale dans laquelle s'écoule un fluide newtonien de viscosité  $\eta$ . On note  $d$  le diamètre du tuyau,  $R$  son rayon et  $L$  sa longueur.

### Hypothèses de travail –

1. L'écoulement est supposé stationnaire, d'où  $\partial\vec{v}/\partial t = \vec{0}$ .
2. L'écoulement est laminaire, parallèle à  $Oz$  et invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$ , d'où  $\vec{v} = v(r, z)\vec{u}_z$ .
3. Le fluide est incompressible.
4. Enfin, la pesanteur est négligeable sur l'épaisseur de la conduite.

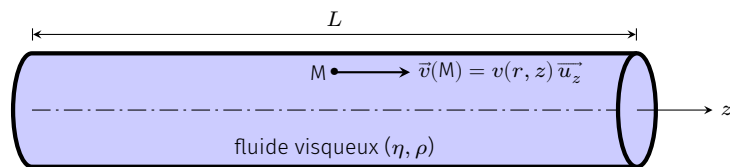


Fig. 6.1 : Écoulement de Poiseuille. Position du problème.

Commençons par écrire l'équation de continuité :

$$\text{div}\vec{v} = \frac{\partial(rv_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(v_\theta)}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow \vec{v} = v(r)\vec{u}_z$$

La vitesse ne dépend que de  $r$ . Calculons l'accélération :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}(v(r)\vec{u}_z) = \vec{0}$$

L'accélération est nulle. En effet, les lignes de courant sont des droites horizontales et se confondent avec la trajectoire des particules (régime stationnaire). Or, si la vitesse ne dépend pas de  $z$  cela signifie que les particules de fluide se déplacent avec une vitesse constante en direction et en intensité. L'accélération est donc nulle. On peut aussi ajouter que chaque particule de fluide est soumise à deux forces qui se compensent : les forces de pression et les forces de viscosité.

Sans force de pression, c'est-à-dire **sans différence de pression, il ne peut pas avoir d'écoulement stationnaire.**

L'équation de Navier-Stokes se réduit à  $\bar{\nabla}p = \eta\Delta\vec{v}$ . Projetons cette relation dans la base cylindrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p}{r\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$$

Ainsi, la pression ne dépend que de  $z$ . Le terme de gauche de la dernière équation ne dépend donc que de  $z$  alors que celui de droite ne dépend que de  $r$ . Cette relation apparemment paradoxale se résout si les deux termes sont constants.

$$\frac{dp}{dz} = K \quad \text{et} \quad \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = K$$

Intéressons-nous au champ de vitesse. En intégrant deux fois on obtient

$$v(r) = \frac{K}{4\eta} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes d'intégration. La vitesse doit être définie en  $r = 0$  ce qui implique  $C_1 = 0$ . Enfin, les conditions aux limites imposent  $v(R) = 0$  d'où

$$v(r) = \frac{-K}{4\eta} (R^2 - r^2) = v_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Le profil des vitesses est parabolique et l'écoulement est le plus

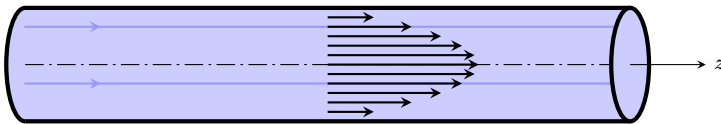


FIG. 6.2 : Profil de vitesse.

rapide le long de l'axe  $Oz$ .

## Loi de Poiseuille

Revenons sur la relation relative à la pression

$$\frac{dp}{dz} = K \quad \text{avec} \quad K < 0$$

où le signe de  $K$  est dicté par le sens de l'écoulement (ici selon  $Oz$ ). On en déduit

$$p(z) = p(0) + Kz$$

La pression diminue linéairement le long de la conduite comme on l'a observé expérimentalement.

**Définition**

On appelle **perte de charge**, la chute de pression entre l'aval et l'amont d'une canalisation. Elle s'exprime en Pa et sera notée  $\Delta p$  dans ce cours.

Ici la perte de charge s'écrit

$$\Delta p = p(0) - p(L) = -KL > 0$$

Déterminons maintenant la relation entre la perte de charge et le débit volumique. Le débit volumique est le flux du vecteur vitesse à travers une section de la canalisation :

$$D_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = -\frac{K\pi R^4}{8\eta}$$

En remplaçant  $K$  par  $-\Delta p/L$  on aboutit à la *loi de Poiseuille* :

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_V \quad [\text{Loi de Poiseuille}] \quad \heartsuit \quad (6.1)$$

On note que la perte de charge double quand la longueur de tuyau double. En revanche, elle est très sensible au diamètre puisqu'elle est divisée par 16 dans le diamètre double.

**Exercice** – On veut perfuser un patient en 1 h avec un flacon de 0,5 L de plasma de viscosité  $\eta = 1,4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et de densité proche de l'eau. Si l'aiguille utilisée a une longueur de 3 cm et un diamètre de 0,4 mm, à quelle hauteur minimale faut-il installer le flacon ?

Solution : 95 cm.

**Analogie électrique**

On peut faire une analogie avec la conduction électrique et définir une résistance hydraulique  $R_H$  analogue de la résistance électrique :

Concepts électriques	Concepts hydrauliques
Potentiel $V$	Pression $p$
ddp $U = V_1 - V_2$	Différence de pression $\Delta p$
Intensité du courant électrique $I$	Débit volumique $D_V$
Loi d'Ohm $U = RI$	Loi de Poiseuille $\Delta p = R_H D_V$

**Formule générale**

La formule de Poiseuille est valable tant que l'écoulement est laminaire. L'expérience montre qu'il faut pour cela que le nombre de Reynolds ne dépasse pas  $2 \times 10^3$  :

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} D_V \quad \text{si} \quad R_e = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} < 2 \times 10^3 \quad \heartsuit \quad (6.2)$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est instable et la turbulence se développe soit de façon intermittente soit de façon totale. Il faut alors utiliser des lois empiriques. Ces lois reposent dans un premier temps sur une analyse dimensionnelle.

Admettons que la perte de charge dépende seulement de la longueur  $L$  de la conduite, de son diamètre  $d$ , de la viscosité  $\eta$  du fluide, de sa masse volumique  $\rho$  ainsi que de la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  d'écoulement. Avec ces 5 grandeurs, on peut former deux nombres sans dimensions :

- Le nombre de Reynolds  $R_e = \rho \langle v \rangle d / \eta$ ;
- le rapport  $x = L/d$ .

Ainsi, la perte de charge  $\Delta p$  dépend de ces deux grandeurs adimensionnées et de 3 autres grandeurs indépendantes. Choisissons  $\rho$ ,  $\langle v \rangle$  et  $d$  de sorte que  $\Delta p$  doit pouvoir se mettre sous la forme

$$\Delta p = \underbrace{f(R_e, x)}_{\text{sans dimension}} \rho^\alpha \langle v \rangle^\beta d^\gamma$$

Il nous reste à déterminer les exposants  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  pour que la relation soit dimensionnellement correcte. On trouve<sup>1</sup>  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $\gamma = 0$ , d'où

$$\Delta p = f(R_e, x) \times \rho \langle v \rangle^2$$

Par ailleurs, l'expérience montre que la perte de charge en ligne est proportionnelle à  $L$ , donc proportionnelle à  $x$ . C'est pourquoi l'expression de la perte de charge peut se mettre sous la forme

$$\Delta p = \lambda(R_e) \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \frac{L}{d} \quad \heartsuit \quad (6.3)$$

Cette relation est appelée *équation de Darcy-Weisbach*. Le facteur adimensionné  $\lambda$  désigne le **coefficient de perte de charge régulière** et ne dépend que du nombre de Reynolds pour une canalisation lisse.

Dans le cas d'une canalisation rugueuse, un troisième nombre sans dimension intervient : la rugosité relative  $\epsilon/d$  qui mesure le rapport de la hauteur moyenne des aspérités de la paroi interne de la conduite sur son diamètre interne. Il suffit donc de réaliser des expériences avec des écoulements de différents nombres de Reynolds et des tuyaux de différentes rugosités pour déterminer de façon empirique la relation  $\lambda(R_e, \epsilon/d)$ . Les résultats empiriques se lisent sur le *diagramme de Moody* (Fig. 6.3).

Quelques remarques sur ce diagramme :

- Il s'agit d'un diagramme logarithmique. Pour le lire, on détermine la rugosité relative pour savoir quelle courbe il faut sélectionner (axe de droite). Ensuite, il suffit de suivre la courbe sélectionnée jusqu'à la valeur du nombre de Reynolds désirée, puis de lire à gauche la valeur du coefficient de perte de charge.
- En régime laminaire les pertes de charge sont données par la loi de Poiseuille qui correspond à un coefficient de pertes de charge

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \quad \text{pour} \quad R_e < 2 \times 10^3$$

1 : Il suffit d'écrire l'équation aux dimensions :

$$[\Delta p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

et

$$[\rho^\alpha \langle v \rangle^\beta d^\gamma] = (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma = M^\alpha L^{-3\alpha+\beta+\gamma} T^{-\beta}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} \alpha & = & 1 \\ -3\alpha + \beta + \gamma & = & -1 \\ -\beta & = & -2 \end{cases}$$

ce qui mène au résultat.

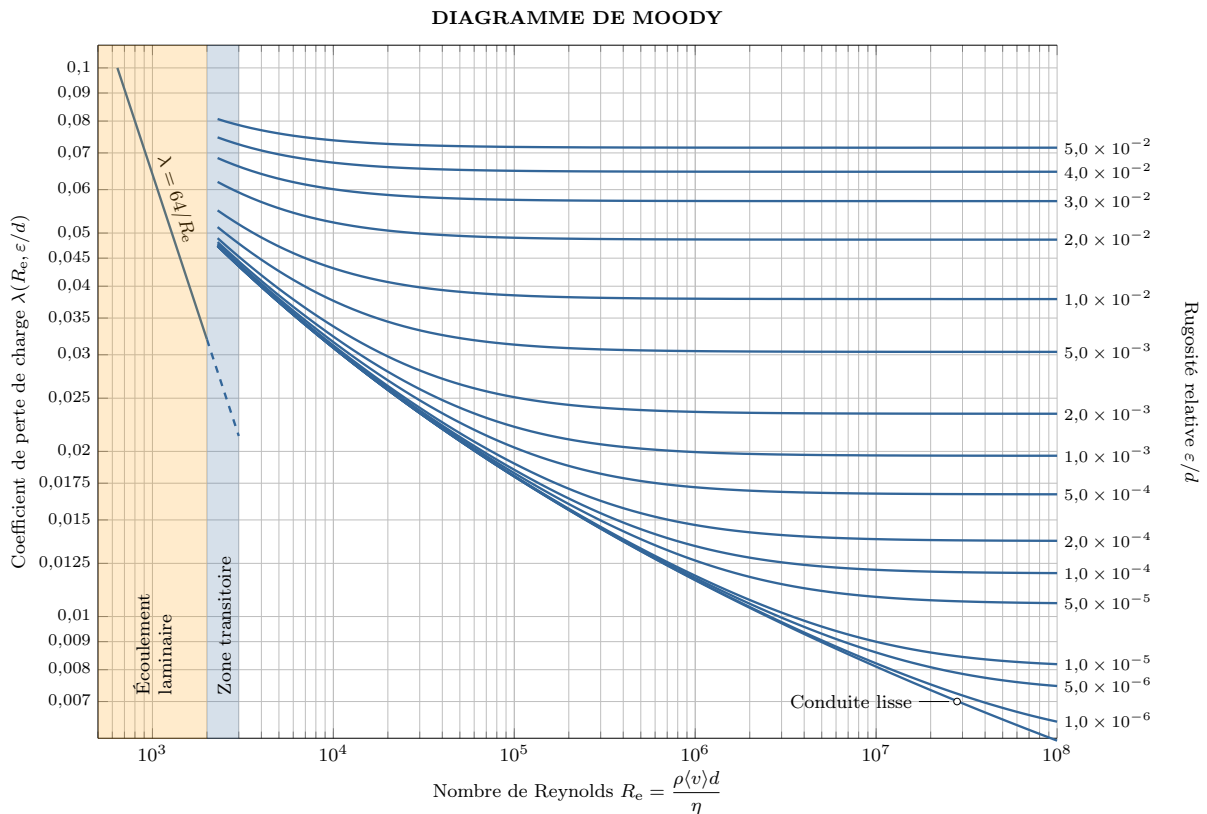


Fig. 6.3 : Diagramme de Moody permettant de lire  $\lambda(R_e, \epsilon/d)$ .

Cette loi se matérialise par une droite décroissante dans le diagramme de Moody (« *laminar flow* »)

**Exercice** – Un tube en acier de 25 mètres de long, de diamètre intérieur 39,5 mm, de rugosité  $\epsilon = 0,1$  mm achemine de l'eau froide à 15°C ( $\rho = 998$  g/L et  $\eta = 1,14$  mPa · s) avec un débit de 2,00 L/s. Calculer la perte de charge en Pa.

Solution : 74 kPa

En régime turbulent,  $\lambda$  augmente brutalement et pour les grands nombres de Reynolds, le coefficient de perte de charge conserve une valeur constante qui ne dépend que de la rugosité relative de la conduite. Dans ce cas, les pertes de charge varient comme le carré du débit. C'est pourquoi, l'analogie avec la loi d'ohm comme la notion de résistance hydraulique n'ont plus de sens en régime turbulent.

## Pertes de charge singulière

Les pertes de charges en ligne étudiées jusqu'ici sont appelées *pertes de charge régulières*.

Lorsque dans une conduite, l'écoulement subit de brusques variations de section ou de direction, il se produit des pertes de charges

dites *singulières*. Elles sont données par la formule

$$\Delta p_s \text{ (en Pa)} = K \frac{1}{2} \rho \langle v_{\text{avant}} \rangle^2$$

où  $\langle v_{\text{avant}} \rangle$  est la vitesse d'écoulement avant le passage de l'obstacle, et  $K$  le coefficient de perte de charge singulière. Ce dernier dépend de la nature de l'obstacle (FIG. 6.4).

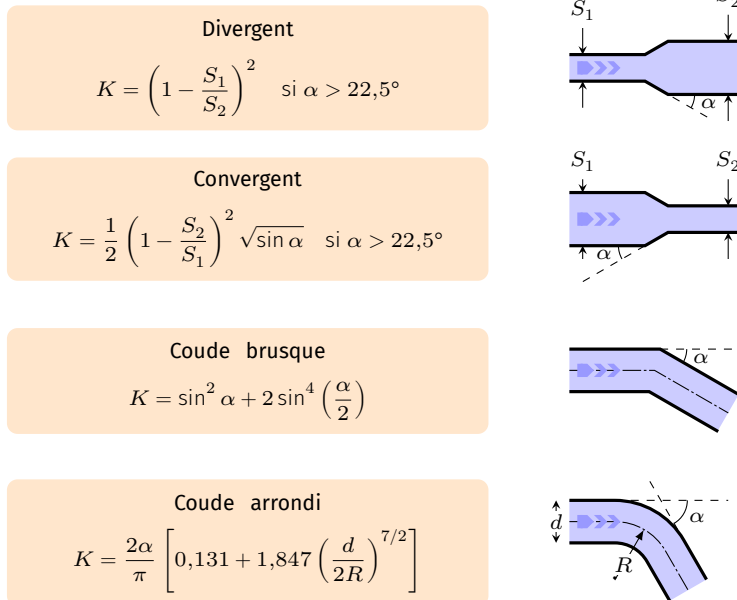


FIG. 6.4 : Coefficients de perte de charge singulière sur quelques géométries.

## Théorème de Bernoulli généralisé

Nous avons vu dans le chapitre consacré aux fluides parfaits, que dans le champ de pesanteur, un fluide incompressible en écoulement stationnaire voit la quantité  $\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z$  se conserver le long d'une ligne de courant ce qui traduit la conservation de l'énergie. Voyons comment s'exprime le bilan d'énergie dans le cas d'un fluide réel en écoulement stationnaire dans une conduite en tenant compte des échanges mécaniques avec des machines hydrauliques.

Considérons un fluide en écoulement stationnaire et incompressible dans un système de conduites où il traverse des machines hydrauliques avec lesquelles il peut échanger de l'énergie :

- des pompes donneront de l'énergie mécanique au fluide ;
- des turbines recevront de la part du fluide de l'énergie mécanique.

Si l'on note  $\mathcal{P}$  la puissance échangée avec le fluide, on a  $\mathcal{P} > 0$  pour les pompes et  $\mathcal{P} < 0$  pour les turbines.

**Bilan d'énergie cinétique** – Considérons comme système, le fluide situé dans la conduite entre A et B à l'instant  $t$  et entre A' et B' à l'instant  $t + dt$ . Pendant  $dt$ , la masse transférée est

$$dm = D_m dt = \rho D_V dt$$

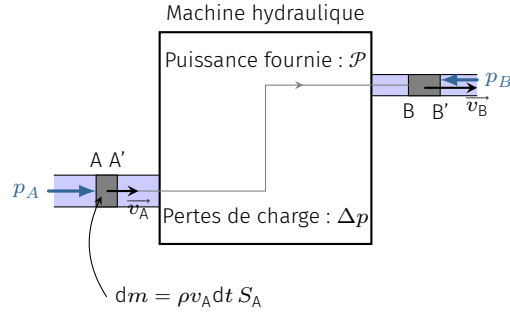


FIG. 6.5 : Écoulement stationnaire dans un système de conduites.

Rappelons que le débit volumique est uniforme le long de la canalisation puisque le fluide est incompressible.

Pour simplifier on considère que les grandeurs physiques sont uniformes sur la section droite de la conduite. Le théorème de l'énergie cinétique donne

$$d\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t + dt) - \mathcal{E}_c(t) = \delta W$$

avec  $\delta W$  le travail de toutes les forces (extérieures et intérieures) s'exerçant sur le système.

Tout d'abord, le régime étant permanent, la portion de fluide située entre A' et B conserve son énergie cinétique de sorte que

$$\mathcal{E}_c(t + dt) - \mathcal{E}_c(t) = \mathcal{E}_c^{BB'} - \mathcal{E}_c^{AA'} = \frac{1}{2} D_m dt (v_B^2 - v_A^2)$$

Par ailleurs, les forces de pesanteur travaillent d'où le transfert mécanique

$$dW_g = -D_m dt g (z_B - z_A) \quad [\text{axe ascendant}]$$

Les machines hydrauliques fournissent une puissance mécanique  $\mathcal{P}$  de sorte que le transfert mécanique effectué pendant la durée  $dt$  s'écrit

$$\delta W_{\text{méca}} = \mathcal{P} dt$$

Quant aux forces de pression, leur travail s'exprime par

$$\delta W_p = -p^{\text{ext}} dV = p_A D_V dt - p_B D_V dt$$

Le fluide est également le siège de forces intérieures. Or, l'écoulement étant incompressible, les particules de fluide se déforment sans changer de volume ce qui explique que les forces de pression interne ne travaillent pas. Par contre, le fluide est le siège d'un travail résistant  $\delta W_\eta$  des forces visqueuses. Par définition, **la perte de charge exprimée en Pa correspond au travail des forces visqueuses par unité de volume** :

$$\delta W_\eta = -D_V dt \times \Delta p \quad \heartsuit \quad (6.4)$$

Finalement le théorème de l'énergie cinétique donne la relation de

Bernoulli généralisée

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B = \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A + \mathcal{P}/D_V - \Delta p \quad \heartsuit \quad (6.5)$$

Notons au passage que l'on retrouve la relation de Bernoulli vu au Chapitre 4 à condition de faire  $\mathcal{P} = 0$  et  $\Delta p = 0$ .

La relation (6.5) utilise l'approximation des écoulements unidimensionnels, ce qui revient à confondre la vitesse avec la vitesse moyenne sur une section droite de la conduite. Cette approximation produit des erreurs sur l'expression de l'énergie cinétique. En effet, le bilan rigoureux de l'énergie donne

$$p_1 + \langle e_{c1} \rangle + \rho g z_1 + \frac{\mathcal{P}}{D_V} = p_2 + \langle e_{c2} \rangle + \rho g z_2 + \Delta p_\eta$$

où  $\langle e_c \rangle$  est la moyenne de l'énergie cinétique volumique défini par

$$\langle e_c \rangle = \left\langle \rho \frac{v^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{D_V} \iint \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \vec{v} \cdot \overline{dS} = \frac{1}{2} \alpha \rho \langle v \rangle^2$$

où  $\alpha$  est un coefficient correctif qui dépend du profil de vitesse dans la canalisation. En pratique les valeurs de  $\alpha$  sont les suivantes :

- $\alpha = 1$  écoulement piston (vitesse uniforme dans toute la section)
- $\alpha = 2$  écoulement laminaire visqueux (newtonien)
- $\alpha = 1,01 - 1,1$  écoulement turbulent.

Comme le terme d'énergie cinétique est souvent faible devant les autres termes, une erreur sur celle-ci a peu d'effet sur le résultat. C'est pourquoi nous prendrons systématiquement  $\alpha = 1$ .

## 6.2 Résistance au mouvement dans les fluides

Si l'on met de côté la poussée d'Archimède, la force que ressent un solide plongé dans un écoulement stationnaire tridimensionnelle est **nulle** si le fluide n'est pas visqueux. En revanche, l'écoulement visqueux autour d'un obstacle solide produit une force qui présente deux composantes : la composante dans le sens de l'écoulement est appelée **force de traînée**, la composante perpendiculaire est la **force de portance**.

### Formule de Stokes

Stokes s'est intéressé à la force de traînée qu'un écoulement visqueux produit autour d'une sphère. Il s'est placé dans le cas où l'écoulement est gouverné par la viscosité c'est-à-dire pour les petits nombres de Reynolds.

La résolution complète est assez longue et nous allons nous contenter de la solution sans chercher à la justifier. Stokes obtient qu'une sphère de rayon  $r$ , immobile, soumise à un écoulement permanent

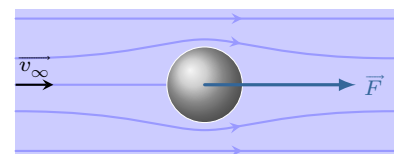


FIG. 6.6 : Traînée sur un obstacle sphérique immobile.

incompressible et visqueux, ressent une force de traînée  $\vec{F}$  proportionnelle à la vitesse d'écoulement et à la taille de la sphère.

$$\vec{F} = 6\pi\eta r \vec{v}_\infty \quad \text{pour } Re \ll 1 \quad \heartsuit \quad (6.6)$$

où  $\vec{v}_\infty$  représente la vitesse de l'écoulement *par rapport* à la sphère et loin de la sphère. Cette force de traînée est liée d'une part à un champ de pression plus important en avant de la sphère et d'autre part aux forces visqueuses.

Si l'on étudie la chute d'une bille sphérique dans un fluide visqueux au repos (loin de la bille), il faut écrire

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  représente la vitesse de la bille dans le référentiel du laboratoire. Cette loi est vérifiée avec une précision meilleure que 1% pour  $Re < 0,3$ .

**Vitesse de sédimentation**

La physique des suspensions (particules solides mélangées à un liquide) et des émulsions (gouttelettes liquides dispersées dans un autre liquide non miscible) utilise la loi de Stokes car le nombre de Reynolds est assez petit. Lorsqu'on laisse reposer un liquide contenant de petites particules solides (comme par exemple un mélange eau-argile), les particules vont décanter c'est-à-dire sédimer au fond du récipient avec une vitesse qui dépend de leur dimension caractéristique. Le temps de décanation donne alors un renseignement sur la taille des grains. En effet les grains tombent à une vitesse constante pour laquelle le poids apparent (poids moins la poussée d'Archimède) compense la force de traînée :

$$6\pi\eta r v_{sed} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_s - \rho_l)g$$

d'où  $v_{sed} = \frac{2}{9\eta}(\rho_s - \rho_l)r^2$ .

**Coefficient de traînée Cx**

L'analyse précédente n'est valable qu'à petit nombre de Reynolds et pour un corps sphérique.

Pour un corps de géométrie différente, la force qu'exerce un fluide en écoulement stationnaire unidirectionnel présente deux composantes.

- Une composante parallèle à  $\vec{v}_\infty$  : c'est la traînée (on dit aussi résistance)  $\vec{F}_\parallel$ .
- Une composante perpendiculaire : c'est la portance  $\vec{F}_\perp$ .

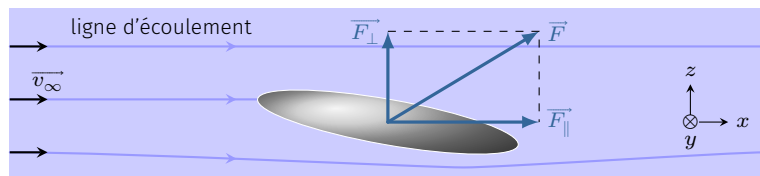


FIG. 6.7 : Portance et traînée.

Le traitement analytique est possible pour des géométries simples et pour des valeurs faibles de  $Re$  comme nous venons de le voir. Pour des grands nombres de Reynolds, on procède en général à des expériences sur maquette en soufflerie pour avoir accès à la force. Montrons par une analyse dimensionnelle quelle forme doit prendre cette force  $F$ .

Admettons que la force dépende de la vitesse  $v_\infty$ , de la densité  $\rho$  du fluide, de sa viscosité  $\eta$  et d'une longueur caractéristique  $\ell$  associé à la taille du corps<sup>2</sup>. Avec ces 4 grandeurs indépendantes, on peut construire un nombre sans dimension, à savoir le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho v_\infty \ell}{\eta}$$

On choisit alors d'exprimer la force en fonction de  $Re$ ,  $\rho$ ,  $v_\infty$  et  $\ell$  :

$$F = f(Re)\rho^\alpha v_\infty^\beta \ell^\gamma$$

2 : Pour une sphère on choisit généralement son diamètre, pour une aile d'avion sa corde.

L'analyse dimensionnelle aboutit à

$$F = f(R_e)\rho v_\infty^2 \ell^2$$

On définit alors deux coefficients de frottement – le  $C_x$  et le  $C_z$  – associés respectivement à la résistance et à la portance :

$$F_{\parallel} = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S C_x(R_e) \quad \text{et} \quad F_{\perp} = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S C_z(R_e)$$

où  $S$  désigne une surface caractéristique de référence. On choisit généralement la **surface projetée** dans le plan  $(yz)$  pour la force de traînée, et dans le plan  $(xy)$  pour la force de portance. Ainsi, il suffit de mesurer les forces aérodynamiques en soufflerie sur une maquette en échelle réduite pour différentes valeurs de nombre de Reynolds pour prévoir les forces en échelle réelle.

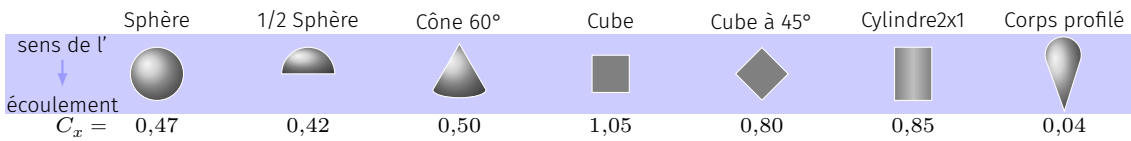


FIG. 6.8 : Quelques  $C_x$  pour différents profils dans un écoulement turbulent avec  $R_e \approx 10^5$ .

Dans le cas d'une sphère (sans rotation propre) de rayon  $r$ , on obtient

$$F = F_{\parallel} = \frac{\pi r^2}{2} \rho v_\infty^2 C_x(R_e) \quad \text{avec} \quad R_e = \frac{\rho v_\infty (2r)}{\eta} \quad \heartsuit \quad (6.7)$$

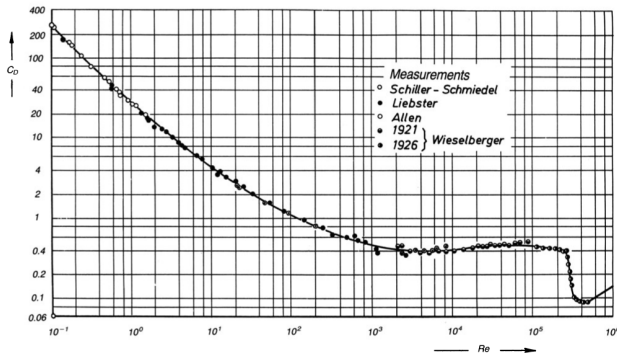


FIG. 6.9 : Évolution du  $C_x$  d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds.

En général, on constate que le  $C_x$  est quasi constant en régime turbulent ce qui correspond aux situations courantes de l'aéronautisme, le nautisme, le cyclisme etc. Pour  $R_e \ll 1$  on a  $C_x = 24/R_e$  et l'on retrouve la loi de Stokes (6.6).

**Exercice** – Déterminer la vitesse limite de chute d'une goutte d'eau sphérique de rayon  $r = 1,0 \text{ mm}$  dans l'air ( $20^\circ\text{C}$  et  $1,0 \text{ bar}$ ) sachant que  $C_x \approx 0,5$  pour  $500 < R_e < 10^5$ .

Solution :  $6,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



# ANNEXES



# THÉORÈME DE LA DIVERGENCE

# A

## Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/green-ostrogradsky.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/green-ostrogradsky.php)

Le théorème de la divergence relie le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée  $S$ , à la somme d'un scalaire en tout point du volume enfermé par  $S$ . Ce théorème fait appel à l'opérateur *divergence*, d'où son nom. La divergence est un *opérateur* qui s'applique à un champ vectoriel et retourne un champ scalaire. Il se note

$$\operatorname{div} \vec{A} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

La dernière notation permet de retrouver son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Imaginons un petit cube d'arête  $a$  centré en  $M(x, y, z)$ , et dont les faces sont des plans cartésiens. Voyons comment s'écrit le flux d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  à travers ce cube.

Commençons par exprimer le flux  $\phi_1$  à travers la face (1) perpendiculaire à l'axe  $(Oy)$  et située en  $y + a/2$  :

$$\phi_1 = \iint_{(1)} \vec{A} \cdot \vec{u}_y \, dS = \iint_{(1)} A_y(x', y + a/2, z') \, dx' \, dz'$$

De même, le flux à travers la face située en  $y - a/2$  vaut

$$\phi_2 = \iint_{(2)} \vec{A} \cdot (-\vec{u}_y) \, dS = \iint_{(2)} -A_y(x', y - a/2, z') \, dx' \, dz'$$

Appelons  $\phi_y$  le flux à travers ces deux faces, et faisons tendre  $a \rightarrow 0$ . On peut alors considérer l'intégrand constant et égale à sa valeur au centre de la face :

$$\phi_y = \phi_1 + \phi_2 = [A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)] a^2$$

$a$  étant un infiniment petit, on peut légitimement remplacer

$$\frac{A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)}{a} \quad \text{par} \quad \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y}$$

ce qui donne  $\phi_y = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} a^3$ . Ce même raisonnement réitéré sur les faces perpendiculaires aux axes  $(Ox)$  et  $(Oz)$  aboutit à

$$\phi_x = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} a^3 \quad \text{et} \quad \phi_z = \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} a^3$$

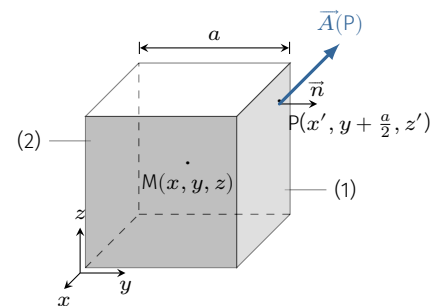


FIG. A.1 : Calcul du flux à travers un cube.

Par convention, la normale  $\vec{n}$  est perpendiculaire à la surface et orientée vers l'extérieur; ce qui explique la présence du signe  $-$ .

Finalement, le flux  $\phi$  du champ vectoriel  $\vec{A}$  à travers un cube infinitésimal centré en  $(x, y, z)$  de volume infinitésimal  $d\tau = a^3$  vaut

$$\phi = \left( \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} \right) d\tau = \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$

Mettons dorénavant côte à côte deux cubes infinitésimaux. Lorsque

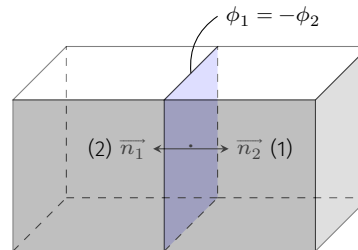


FIG. A.2 : Le flux à travers deux cubes adjacents se réduit au flux à travers la surface qui délimite le volume constitué par la réunion des deux cubes.

l'on calcule le flux à travers ces deux cubes réunis, on s'aperçoit que la contribution due aux surfaces adjacentes se compensent, car les normales à ces faces sont opposées. Aussi, le flux total se réduit-il au flux à travers la surface frontière. Dès lors, on conçoit qu'en empilant de tels cubes en nombre infini, on puisse reconstituer un volume fini, de sorte que le flux à travers la surface frontière soit égal à la somme des flux élémentaires produits à travers chaque petit cube constituant le volume. C'est le sens du théorème de la divergence.

### Théorème de la divergence

L'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume  $V$  est égal au flux de ce champ à travers la surface fermée qui délimite le volume.

$$\oiint_{M \in S} \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{M \in V} \operatorname{div} \vec{A}(M) d\tau$$

Ce théorème est aussi appelé *théorème de Green-Ostrogradsky*

# ACCÉLÉRATION D'UNE PARTICULE DE FLUIDE

# B

Ce complément donne une expression alternative de l'accélération faisant intervenir les opérateurs gradient et rotationnel.

## Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/acceleration-particule.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/acceleration-particule.php)

On a vu dans le [Chapitre 3](#) consacré à la cinématique des fluides, que l'accélération d'une particule de fluide située en  $M$  à l'instant  $t$  pouvait s'obtenir à l'aide du champ de vitesse  $\vec{v}(M, t)$  :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

où le dernier terme désigne la partie **convective** de l'accélération. Explicitons la composante suivant  $Ox$  de ce terme en utilisant l'identité du double produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

Prenons  $\vec{A} = \vec{v}$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} v_x$  et  $\vec{C} = \vec{u}_x$  :

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x) = (\vec{v} \cdot \vec{u}_x) \vec{\nabla} v_x - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x) \vec{u}_x$$

Le premier membre s'écrit aussi  $\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge v_x \vec{u}_x)$ . Quant au premier terme du second membre, on a

$$(\vec{v} \cdot \vec{u}_x) \vec{\nabla} v_x = v_x \vec{\nabla} v_x = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v_x^2$$

Enfin le dernier terme est équivalent à  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x \vec{u}_x$ . Ainsi on obtient

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge v_x \vec{u}_x) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v_x^2 - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_x \vec{u}_x$$

En procédant de la même façon pour les deux autres composantes, on obtient, après avoir sommé les trois relations,

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

où l'on reconnaît  $v^2$  dans le gradient. En substituant dans l'expression de l'accélération, on aboutit à une nouvelle expression de l'accélération :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

L'opérateur  $\vec{\nabla} \wedge$  s'appelle le rotationnel ; il s'applique à un champ vectoriel et retourne également un champ vectoriel. Il se note indifféremment

$$\vec{\text{rot}} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge$$

On voit ici que l'accélération fait intervenir le rotationnel de la vitesse, que l'on appelle vorticité en mécanique des fluides. Pour résumer,

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (\text{B.1})$$

Version en ligne

[femto-physique.fr/mecanique\\_des\\_fluides/theoreme-pi.php](http://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/theoreme-pi.php)

C.1 Énoncé . . . . .	73
C.2 Applications en mécanique des fluides . . . . .	73
Force de traînée . . . . .	73
Pertes de charge . . . . .	74
Convection forcée . . . . .	75

## C.1 Énoncé

Le *théorème  $\pi$*  ou *théorème de Vaschy-Buckingham* est le théorème fondamental de l'analyse dimensionnelle.

Supposons que nous cherchions une relation entre  $n$  grandeurs physiques  $g_{i=1..n}$  que l'on considère pertinentes pour décrire un phénomène. Notons  $k$  le nombre de dimensions fondamentales utilisées par ces grandeurs ( $k \leq 7$ ).

Le théorème stipule qu'il existe alors  $(n - k)$  produits sans dimension notées<sup>1</sup>  $\pi_i$  tels que  $f(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = 0$ .

Ainsi, procéder à une analyse dimensionnelle consiste à déterminer ces nombres sans dimensions, ce qui ne pose pas de problème en général. Une fois ces nombres définies, le problème se ramène alors à une relation entre grandeurs adimensionnées. Cette dernière fait apparaître une constante ou une fonction à déterminer empiriquement. Ainsi, lorsque le problème est trop complexe pour une modélisation, l'analyse dimensionnelle est un guide précieux avant toute analyse empirique.

1 : Dans l'article original de Buckingham, ces nombres sans dimension sont notés  $\Pi$ , d'où le nom du théorème

## C.2 Applications en mécanique des fluides

### Force de traînée sur une sphère

Plaçons un obstacle sphérique dans un écoulement stationnaire de vitesse  $\vec{v}_\infty$  loin de l'obstacle et cherchons la force de traînée  $\vec{F}$  que produit l'écoulement sur l'obstacle. Que donne l'analyse dimensionnelle ?

L'expérience montre que cette force est influencée par les facteurs suivants :

- le diamètre  $d$  de la sphère;
- la masse volumique  $\rho$  du fluide;
- sa viscosité  $\eta$ ;
- ainsi que la vitesse d'écoulement  $v_\infty$ .

Rassemblons dans un tableau la dimension des cinq grandeurs que l'on cherche à relier :

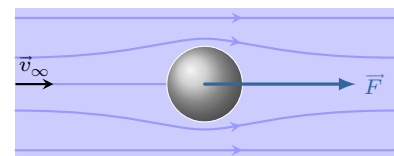


FIG. C.1 : Traînée sur un obstacle sphérique immobile.

<b>Grandeurs</b>	$v_\infty$	$d$	$\rho$	$\eta$	$F$
<b>Dimensions</b>	$LT^{-1}$	L	$ML^{-3}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$MLT^{-2}$

On a  $n = 5$  grandeurs et  $k = 3$  dimensions différentes. D'après le théorème  $\pi$ , il existe  $n - k = 2$  nombres sans dimensions  $\pi_1$  et  $\pi_2$  liés entre eux. Il est facile de construire de tels nombres :

- On sait que le nombre de Reynolds est un facteur adimensionné. On choisit donc

$$\pi_1 = R_e = \frac{\rho v_\infty d}{\eta}$$

- Par ailleurs, la quantité  $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$  est homogène à une pression, comme le rapport  $F/d^2$ . On pose alors

$$\pi_2 = \frac{F/d^2}{1/2\rho v_\infty^2}$$

En vertu du théorème  $\pi$  nous savons que

$$\pi_2 = f(\pi_1) \quad \text{soit} \quad F = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 d^2 f(R_e) \quad (C.1)$$

Des études en soufflerie permettent d'accéder à la fonction inconnue  $f(R_e)$ .

## Pertes de charges régulières

Considérons une conduite cylindrique horizontale traversée par un fluide newtonien circulant avec un certain débit. On observe une différence de pression –dite perte de charge– entre l'amont et l'aval du tuyau. Notons-là  $\Delta p_\eta$ . L'expérience montre que les pertes de charge sont influencées par les paramètres suivants :

- la longueur  $L$  de la conduite;
- son diamètre  $d$ ;
- la masse volumique du fluide;
- sa viscosité  $\eta$ ;
- la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  de l'écoulement;
- ainsi que l'état de surface de la canalisation que l'on peut caractériser par la rugosité  $\epsilon$ .

Déterminons les dimensions de ces sept grandeurs que l'on cherche à relier.

<b>Grandeurs</b>	$L$	$d$	$\rho$	$\eta$	$\Delta p_\eta$	$\langle v \rangle$	$\epsilon$
<b>Dimensions</b>	L	L	$ML^{-3}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$ML^{-1}T^{-2}$	$L.T^{-1}$	L

On a  $n = 7$  grandeurs et  $k = 3$  dimensions différentes impliquées dans ces grandeurs. D'après le théorème  $\pi$ , il existe  $n - k = 4$  nombres sans dimension –notons-les  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  et  $\pi_4$ – qui doivent être reliées par une loi. Cherchons donc à construire quatre nombres indépendants sans dimension.

- $L$  et  $d$  étant de même dimension, leur rapport est adimensionné :  $\pi_1 = L/d$ .
- $\epsilon$  et  $d$  sont aussi de même dimension :  $\pi_2 = \epsilon/d$  (rugosité relative).
- On sait que le nombre de Reynolds est sans dimension ; ce sera  $\pi_3 = R_e = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta}$ .
- Enfin, le théorème de Bernoulli nous enseigne que  $\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2$  est homogène à une pression. Ainsi  $\pi_4 = \frac{\Delta p_\eta}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2}$ .

D'après le théorème  $\pi$ , il existe une relation entre ces quatre nombre sans dimension. Par exemple :

$$\pi_4 = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

Autrement-dit,

$$\frac{\Delta p_\eta}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2} = f(L/d, \epsilon/d, R_e)$$

L'analyse dimensionnelle est ici terminée. La fonction  $f(L/d, \epsilon/d, R_e)$  est à déterminer, soit de façon empirique, soit à l'aide d'une modélisation<sup>2</sup>

Empiriquement, on constate que la perte de charge  $\Delta p_\eta$  est proportionnelle à  $L$ . Par conséquent, on peut écrire

$$f(L/d, \epsilon/d, R_e) = \frac{L}{d} \times \lambda(\epsilon/d, R_e)$$

où  $\lambda(\epsilon/d, R_e)$  est une fonction inconnue à déterminer. Pour résumer, on a

$$\Delta p_\eta = \lambda(\epsilon/d, R_e) \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \frac{L}{d}$$

Cette relation est appelée *équation de Darcy-Weisbach*. Le facteur adimensionné  $\lambda$  désigne le **coefficient de perte de charge régulière** et cette analyse prévoit qu'il ne dépend que du nombre de Reynolds et de l'état de surface de la canalisation *via* la rugosité relative.

## Convection forcée

La convection est un mode de transfert thermique qui implique un déplacement collectif de fluide. La matière fluide chaude, en se déplaçant, cède de l'énergie aux parties plus froides. Lorsque le déplacement du fluide est forcé par des pompes ou des turbines par exemple, on parle de *convection forcée*.

Prenons le cas d'un simple échangeur cylindrique de diamètre intérieur  $d$  dans lequel circule un fluide de masse volumique  $\rho$ , de viscosité  $\eta$ , de conductivité thermique  $\lambda$  et de capacité thermique massique  $c_p$ . Lorsque le fluide s'écoule à une vitesse moyenne  $\langle v \rangle$ , un échange convectif a lieu avec l'intérieur du tuyau. En vertu de la loi de Newton, le courant thermique (en  $W \cdot m^{-2}$ ) est proportionnel à l'écart de température entre le fluide et le solide. On a

$$j_{th} = h \Delta T$$

<sup>2</sup> : cf. la loi de Poiseuille par exemple au Chapitre 6.

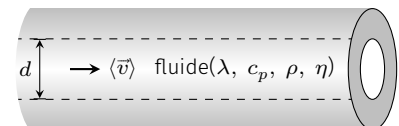


FIG. C.2 : Convection dans un échangeur cylindrique.

où  $h$  est le *coefficient de transfert*. Ce dernier dépend essentiellement de la nature du fluide et de son écoulement. Montrons sur la géométrie de la FIG. C.2 comment l'analyse dimensionnelle permet de prévoir des lois d'échelle concernant le coefficient de transfert  $h$ . Comme d'habitude, dressons une table avec toutes les grandeurs a priori impliquées.

Grandeur	$\rho$	$\langle v \rangle$	$d$	$\eta$	$\lambda$	$c_p$	$h$
Dimension	$ML^{-3}$	$LT^{-1}$	L	$ML^{-1}T^{-1}$	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$MT^{-3}\Theta^{-1}$

On cherche une relation entre  $n = 7$  grandeurs mettant en jeu  $k = 4$  dimensions indépendantes. En vertu du théorème  $\pi$ , il existe  $n - k = 3$  grandeurs adimensionnées liées entre elles. On peut effectivement construire trois nombres sans dimension :

- **Le nombre de Reynolds**  $R_e = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta}$  qui caractérise l'écoulement.
- **Le nombre de Prandtl**  $P_r = \frac{\eta c_p}{\lambda}$ . Plus le nombre de Prandtl est élevé, plus la diffusion de masse domine devant la diffusion de chaleur.
- **Le nombre de Nusselt**  $N_u = \frac{hd}{\lambda}$ . Plus le nombre de Nusselt est important plus le transfert par convection domine devant le transfert par conduction.

D'après le théorème  $\pi$ , on a

$$N_u = f(R_e, P_r) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\lambda}{d} f(R_e, P_r)$$

La fonction  $f$  peut être déterminée de façon empirique ou numérique. Par exemple, pour les fluides usuels et lorsque le régime turbulent est établi, on obtient

$$N_u = 0,023 R_e^{0,8} P_r^{1/3} \quad \text{si } P_r \geq 0,5$$

## Pour en savoir plus

- [1] Pierre-Gilles de GENNES, Françoise Brochard WYART et David QUÉRÉ. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002 (cf. p. 15).
- [2] Jean-Pierre HULIN, Etienne GUYON et Emmanuel GUYON. « Pilotes et tourbillons ». In : *bulletin de la société française de physique* (mai 2002), p. 4.
- [3] S. CANDEL. *Mécanique des fluides 2ème cycle*. Paris : Dunod, 2001.
- [4] P. FLEURY et J.P. MATHIEU. *Mécanique Physique*. Sous la dir. d'EYROLLES. 1961.
- [5] Ludovic KEISER et al. « Fragmentation Marangoni ». In : *Reflets de la Physique* 59 (sept. 2018), p. 33-35.
- [6] D. LYNCH. « Les mascarets ». In : *Pour la Science* (déc. 1982).
- [7] C. CLANET et L. BOCQUET. « Les ricochets ». In : *Bulletin de la SFP* 152 (déc. 2005).
- [8] David QUÉRÉ, José BICO et Denis RICHARD. « Le mouillage nul (ou presque) ». In : *Bulletin de la SFP* 125 (juill. 2000), p. 8.
- [9] Dominique LANGEVIN et al. « Les mousses ». In : *Bulletin de la Société française de physique* 134 (mai 2002), p. 11-16.
- [10] G. DUPEU et al. « Le football et ses trajectoires ». In : *Reflets de la physique* 28 (mars 2012), p. 10-14.
- [11] Marc RABAUD et Frédéric MOISY. « Du neuf dans les sillages ». In : *Reflets de la physique* 39 (2014), p. 10-13.
- [12] Tom SCHELLER. « Micro-écoulements dans des films liquides : application aux mousses aqueuses ». In : *Mémoire, (Université de Liège, Année académique 2004-2005)* ().
- [13] Lydéric BOCQUET. « The physics of stone skipping ». In : *American Journal of Physics* 71.2 (2003), p. 150-155.
- [14] Ian BRUCE. « Concerning drops ». In : *American Journal of Physics* 52.12 (1984), p. 1102-1105.
- [15] Fereidoon BEHROOZI et al. « The profile of a dew drop ». In : *American Journal of Physics* 64.9 (1996), p. 1120-1125.
- [16] Isabelle GALLAGHER. *Autour des équations de Navier-Stokes — Images des Mathématiques, CNRS*. 2010. URL : <http://images.math.cnrs.fr/Autour-des-equations-de-Navier.html>.
- [17] G. LIGER-BELAIR. « Histoire illustrée d'une bulle de champagne ». In : *Bulletin de la SFP* 127 (déc. 2000).
- [18] D. QUÉRÉ et J-M Di MEGLIO. « Sur un thème de Rayleigh ». In : *Pour la Science* 152 (juin 1990).
- [19] B. DARBOIS-TEXIER et al. « La caléfaction ». In : *Reflets de la physique* 37 (déc. 2013).
- [20] A. Amon P. PANIZZA et L. COURBIN. « Comment circulent des gouttes dans un laboratoire sur puce ? » In : *Reflets de la physique* 36 (oct. 2013).
- [21] D. LANGEVIN. « La coalescence ». In : *Bulletin de la SFP* 115 (juill. 1998).
- [22] D. LANGEVIN. « Les tensioactifs ». In : *BUP, Hors série* 875 (2005).
- [23] D. QUÉRÉ et al. « Les surfaces superhydrophobes ». In : *Images de la physique* (2005), p. 239-244.



# Grandeurs physiques et symboles mathématiques

## Constantes physiques définies par le SI (valeurs exactes)

$h$	Constante de Planck	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
$c$	Vitesse de la lumière dans le vide	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	Fréquence hyperfine du $^{133}\text{Cs}$	$9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$
$e$	Charge élémentaire	$1,602\,176\,634 \times 10^{-9} \text{ C}$
$k_{\text{B}}$	Constante de Boltzmann	$1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
$N_{\text{A}}$	Nombre d'Avogadro	$6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$R = k_{\text{B}}N_{\text{A}}$	Constante des gaz parfaits	$8,314\,462\,618 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
$K_{\text{cd}}$	Efficacité lumineuse	$683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$

## Autres constantes physiques

$G$	Constante gravitationnelle	$6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
$\epsilon_0$	Permittivité diélectrique du vide	$8,85418781 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
$\mu_0$	Perméabilité magnétique du vide	$1,256637062 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
$m_{\text{e}}$	Masse de l'électron au repos	$9,10938370 \times 10^{-31} \text{ kg}$
$m_{\text{p}}$	Masse du proton au repos	$1,672621923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
$m_{\text{n}}$	Masse du neutron au repos	$1,674927498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

## Grandeurs physiques

$\vec{a}$	Accélération ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
$C_x, C_y, C_z$	Coefficients aérodynamiques (sans dimension)
$\mathcal{E}_c$	Energie cinétique (J)
$\mathcal{E}_p$	Energie potentielle (J)
$e_c$	Énergie cinétique volumique ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ )
$e_p$	Énergie potentielle volumique ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ )
$\vec{F}$	force (N)
$\vec{f}$	force volumique ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ )
$\vec{g}$	Champ de pesanteur ( $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$ )
$J_m$	Densité de courant massique ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ )

$M$	Masse molaire ( $\text{kg.mol}^{-1}$ )
$m$	Masse (kg)
$n^*$	Densité de particules ( $\text{m}^{-3}$ )
$\mathcal{P}$	Puissance (W)
$p$	Pression (Pa)
$D_m$	Débit massique ( $\text{kg.s}^{-1}$ )
$D_V$	Débit volumique ( $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ )
$Re_e$	Nombre de Reynolds (sans dimension)
$T$	Température (K)
$t$	Temps (s)
$V$	Volume (sa mesure en $\text{m}^3$ )
$\vec{v}$	Vitesse ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$W$	Travail (J)
$\gamma$	Tension superficielle ( $\text{J.m}^{-2}$ )
$\lambda$	Coefficient de perte de charge (sans dimension)
$\eta$	Viscosité (Pa.s)
$\rho$	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$\sigma$	Contrainte ( $\text{N.m}^{-2}$ )
$\omega, \Omega$	Vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

### Symboles mathématiques

$\stackrel{\text{def}}{=}$	Relation de définition
$\sim$	Égal en ordre de grandeur
$A \gg B$	$A$ très grand devant $B$
$A \ll B$	$A$ très petit devant $B$
$\langle g \rangle$	Moyenne d'une grandeur $g$
$\frac{df}{dt}$	Dérivée première par rapport au temps
$\frac{d^n f}{dt^n}$	Dérivée n-ième par rapport au temps
$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	Base cartésienne
$(r, \theta, z)$	Coordonnées cylindriques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	Base cylindrique
$(r, \theta, \varphi)$	Coordonnées sphériques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	Base sphérique

$A_z$	Composante suivant l'axe (Oz) : $A_z = \vec{A} \cdot \vec{u}_z$
$\int_{\mathcal{D}}$	Intégration sur un domaine $\mathcal{D}$
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$	Circulation de $\vec{A}$ le long du circuit C
$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS$	Flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$
$\iiint_V f(M) d\tau$	Intégrale de volume
$\overrightarrow{\text{grad}}f$ ou $\vec{\nabla}f$	Gradient d'un champ scalaire
$\text{div}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	Divergence d'un champ vectoriel
$\text{rot}\vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	Rotationnel d'un champ vectoriel
$\Delta f = \nabla^2 f$	Laplacien scalaire



2025