

## Réflexions sur l'effet Hall

par Bruno JECH

Lycée Léonce Vieljeux - 17000 La Rochelle

bruno.jech@ac-poitiers.fr

**A** PRÈS AVOIR RAPPELÉ les circonstances dans lesquelles Edwin Herbert Hall mit en évidence l'effet qui porte son nom, nous passerons au crible de la critique l'interprétation usuelle de cet effet par l'existence de charges surfaciques, existence qui se révélera conséquemment fort douteuse. Nous proposerons alors une approche relativiste de l'effet Hall, cet effet résultant dans ce cadre d'une simple transformation de Lorentz appliquée au champ électromagnétique, ce qui permettra de lever certaines faiblesses de l'interprétation usuelle<sup>(1)</sup>.

« L'illusion est la première apparence de la vérité. »

Rabindranàth Tagore (Chitra, scène VIII)

En physique, nous recourons souvent au « *tout se passe comme si* » pour simplifier une explication tout en sachant que « *ça ne se passe pas comme ça* ». Tout se passe comme si la voile d'un bateau navigant « au près » était gonflée par des forces qui la poussent, alors qu'elle est essentiellement aspirée par une dépression aérodynamique. Tout se passe comme si il n'y avait pas de lumière entre deux raies lumineuses données par un réseau diffractant, alors que de multiples rayonnements lumineux cohérents s'y contrarient mutuellement. Tout se passe comme si un champ purement coulombien était créé par une charge ponctuelle, alors que cette dernière se heurte à de délicats problèmes d'infini en champ, potentiel et énergie... « *Tout se passe comme si, mais ça ne se passe pas comme ça* ». Parfois cependant, le « *tout se passe comme si* » est omis et le modèle simplificateur semble alors se faire réalité : c'est le cas pour l'interprétation de l'effet Hall recourant à des charges surfaciques qui fait actuellement consensus. Après avoir rappelé les circonstances historiques de la découverte de cet effet, nous opérerons une « déconstruction »

- (1) **Remerciements** : notre gratitude va tout d'abord à Jean-Marc Lévy-Leblond qui, dès 1978, avait contesté la validité du raisonnement classique expliquant l'effet Hall et qui a soutenu notre démarche. Nos chaleureux remerciements vont également à Olivier Darrigol et à Alexis Méret avec qui nous avons pu échanger sur ce thème, ce qui nous a permis de faire progresser et aboutir notre réflexion. Enfin nous remercions vivement le *referee* (anonyme) du Comité de lecture de l'UdPPC dont la rigueur pointilleuse a permis de corriger et préciser certains de nos propos.

de l'interprétation usuelle de celui-ci pour en souligner les vices cachés, rendant ainsi cette interprétation fort douteuse. Nous proposerons alors une alternative de portée plus générale, car d'essence relativiste, permettant d'évacuer les contradictions impliquées par la description de l'effet Hall donnée dans la plupart des manuels.

## 1. « SUR UNE NOUVELLE ACTION DE L'AIMANT SUR LES COURANTS ÉLECTRIQUES »

### 1.1. Avant que Hall ne découvrit son effet



Figure 1 - Edwin Herbert Hall vers 1879.

Quand Edwin Herbert Hall (1855–1938), chargé de cours à l'Université Johns-Hopkins (Baltimore, Maryland) et préparant sa thèse de doctorat, découvrit l'effet qui porte son nom le mardi 28 octobre 1879, Albert Einstein (1879–1955) était un beau bébé de sept mois et demi, il ne restait plus que huit jours à vivre à James Clerk Maxwell (1831–1879) souffrant d'un douloureux néoplasme abdominal et Hendrick Antoon Lorentz (1853–1928) avait 26 ans, l'âge qu'aura Einstein quand il publiera son premier article sur la relativité.

Par ailleurs, et moins anecdotiquement, le terme *électron* ne fait pas encore partie du langage scientifique<sup>(2)</sup> et Lorentz n'entamera sa théorie électronique de

l'électromagnétisme que treize ans plus tard<sup>(3)</sup>. Autant dire que la conception du cou-

(2) Le mot *électron* n'apparaît qu'en 1891, au détour d'un article du physicien irlandais George Johnstone Stoney (1826–1911). Depuis 1874, celui-ci était en effet convaincu de l'existence d'une charge électrique élémentaire définie pouvant être positive ou négative, « associée à chaque valence dans l'atome chimique ». Selon lui, il pouvait « y en avoir plusieurs pour un seul atome chimique » et il devait y en avoir au moins deux de signe contraire dans chaque atome pour en assurer la neutralité électrique. C'est cette charge élémentaire que Stoney proposa d'appeler *électron* « pour la commodité du langage » (cité par Millikan, [13], p. 30–31, cf. aussi une lettre de Stoney envoyée au *Philosophical Magazine* [17]). A noter qu'en 1891, l'électron ne désigne pas encore une particule.

(3) Par un article écrit en français et intitulé « La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants ». On trouve de longs extraits de cet article dans [4], p. 227–236.

rant électrique que l'on avait en 1879 était loin d'être celle admise aujourd'hui. Certes, trois ans plus tôt, le patron de thèse de Hall, Henry Augustus Rowland (1848-1901), avait montré dans le laboratoire de Hermann Helmholtz (1821-1894) à Berlin qu'une charge électrique répartie sur un disque en rotation rapide crée un champ magnétique tout comme un courant [8, 17], mais il faudra attendre 1897 pour que Joseph John Thomson (1856-1940) mette en évidence l'aspect corpusculaire de l'électron [19] et 1900 pour que Paul Drude (1863-1906) propose son modèle de conduction électrique dans les métaux<sup>(4)</sup> [5]. En bref, si en 1879 le courant électrique est tenu pour un fluide, sa nature reste pour l'essentiel mystérieuse.

### *On a New Action of the Magnet on Electric Currents.*

BY E. H. HALL, *Fellow of the Johns Hopkins University.*

SOMETIME during the last University year, while I was reading Maxwell's Electricity and Magnetism in connection with Professor Rowland's lectures, my attention was particularly attracted by the following passage in Vol. II, p. 144:

"It must be carefully remembered, that the mechanical force which urges a conductor carrying a current across the lines of magnetic force, acts, not on the electric current, but on the conductor which carries it. If the conductor be a rotating disk or a fluid it will move in obedience to this force, and this motion may or may not be accompanied with a change of position of the electric current which it carries. But if the current itself be free to choose any path through a fixed solid conductor or a network of wires, then, when a constant magnetic force is made to act on the system, the path of the current through the conductors is not permanently altered, but after certain transient phenomena, called induction currents, have subsided, the distribution of the current will be found to be the same as if no magnetic force were in action. The only force which acts on electric currents is electromotive force, which must be distinguished from the mechanical force which is the subject of this chapter."

**Figure 2** - Le début de l'article de Hall extrait de l'*American Journal of Mathematics*, vol. 2, 1879 ;  
À noter que cet article de six pages ne comporte aucun schéma.

Au début de son article exposant scrupuleusement ses questionnements, démarches et expériences [7], Hall rapporte que son « *attention fut particulièrement attirée* » par le paragraphe 501 – qu'il cite *in extenso* – du *Traité d'électricité et de magnétisme* de Maxwell publié six ans plus tôt ([13], p. 157). Maxwell y incite en substance à bien distinguer les

(4) L'idée n'était pas nouvelle, puisque déjà suggérée d'abord par Wilhelm Eduard Weber, puis par Wilhelm Giese (1889) comme le rappelle Drude au début de son article. Néanmoins, ce fut ce dernier qui l'exploita véritablement en interprétant les phénomènes de conduction thermique et électrique par le mouvement contrarié de particules qu'il nomma explicitement *électrons* ou *noyaux électriques* ([5], paragraphes 3, 4 et 5).

forces mécaniques s'exerçant sur les conducteurs électriques des forces électromotrices agissant sur le courant qui le parcourt. Et Maxwell de préciser « [qu']après l'atténuation de divers phénomènes transitoires, appelés courants d'induction, on trouvera la même distribution de courant que si aucune force magnétique n'agissait. » ([13], p. 157).

Or la distinction établie par Maxwell heurte le bon sens du physicien américain en ce qu'« un fil métallique non parcouru par un courant n'est en général pas influencé par un aimant et qu'un fil parcouru par un courant est influencé en proportion exacte de l'intensité (strength) du courant, alors que les dimensions et, en général, le matériau du fil sont indifférents. » ([7], p. 287). Se tournant alors vers Rowland, ce dernier lui répond qu'il doute en effet de la justesse du propos de Maxwell et qu'il a lui-même tenté de mettre en évidence une action directe du champ magnétique sur le courant, sans succès. Il donne donc carte blanche à Hall pour creuser la question, tout en restant de bon conseil et en proposant d'importantes modifications aux protocoles expérimentaux de son thésard. L'idée de Hall est simple : « Si le courant électrique dans un conducteur immobilisé est lui-même attiré par l'aimant, le courant devrait être entraîné vers un côté du fil et la résistance mesurée expérimentalement devrait donc s'en trouver augmentée. » ([7], p. 288)<sup>(5)</sup>. Il dispose donc une bobine d'un fil en argent allemand entre les pôles d'un électroaimant<sup>(6)</sup>, la bobine constituant par ailleurs l'un des bras d'un pont de Wheatstone permettant de mesurer sa résistance. Après une longue et minutieuse série de mesures, Hall montre ainsi et avec une excellente précision que l'action de l'aimant ne provoque aucun changement de résistance dans la bobine.

## 1.2. Et Hall fit son effet...

Hall aurait pu s'en tenir là, mais il note immédiatement que « l'expérience précédente est insuffisante pour prouver que l'aimant ne peut influencer un courant électrique. » ([7], p. 289). Il invoque alors l'une des caractéristiques du fluide électrique communément admises en son temps : l'*incompressibilité*<sup>(7)</sup>. Pour comprendre l'approche de Hall, considérons une canalisation d'eau horizontale soumise au champ de pesanteur. Ce dernier n'affecte pas les lignes de courant d'eau, mais se manifeste par un champ de pression massique

- (5) Rappelons que la résistance électrique d'un conducteur dépend du matériau qui le constitue, mais aussi et surtout de la distribution de courant qui le parcourt. L'argument de Hall est toutefois spécieux, certaines distributions de courant – un profil linéaire par exemple – ne conduisant pas à une modification de la résistance électrique.
- (6) L'argent allemand est un alliage cuivre/nickel/zinc communément utilisé par les bijoutiers. D'après les données de Hall, cet électroaimant alimenté par une pile Bunsen – de tension à vide d'environ 1,9 V – délivrait un champ magnétique n'excédant pas 0,25 T.
- (7) En régime stationnaire, le champ densité de courant est en effet à flux conservatif (conservation de l'intensité électrique) tout comme le champ des vitesses d'un écoulement incompressible (conservation du débit volumique).

directement opposé permettant à ces lignes de rester horizontales. Dans le cas d'un conducteur parcouru par un courant, il devait en être de même, l'action de l'aimant étant équilibrée par un état de *tension* transversale mesurable à l'aide d'un dispositif volt-métrique. Se tournant à nouveau vers Rowland, ce dernier lui propose de refaire une expérience qu'il a lui-même tentée sans succès – ce probablement à cause de la trop grande épaisseur du conducteur qu'il avait soumis au champ magnétique. Il suggère ainsi à Hall d'utiliser comme conducteur un ruban de feuille d'or de 9 cm de long sur 2 cm de large, plaqué sur une lame de verre placée entre les pôles de l'électroaimant, la tension sur la largeur du ruban étant mesurée à l'aide d'un galvanomètre de Thomson<sup>(8)</sup>.

Et ce fut ainsi que, le 28 octobre 1879, Hall put mettre qualitativement en évidence la *tension électrique* attendue, le signe de cette dernière dépendant du sens du courant électrique et de celui du champ magnétique. Il en déduisit immédiatement que le courant électrique dans la feuille d'or devait probablement être tenu pour un écoulement allant de la borne négative vers la borne positive.

Current through Gold Leaf Strip. <i>C.</i>	Strength of Magnetic Field. <i>M.</i>	Current through Thomson Galvanometer. <i>G.</i>	$\frac{C \times M}{G}$
.0616	11420 <i>H</i>	.0000000232	303000000000.
.0249	11240 “	.....085	329.....
.0389	11060 “	.....135	319.....
.0598	7670 “	.....147	312.....
.0595	5700 “	.....104	326.....

Figure 3 - Tableau de valeurs donné par Hall.

Chaque colonne donne respectivement l'intensité du courant dans le ruban d'une feuille d'or (en *A*), le champ magnétique en multiple de la composante horizontale du champ magnétique terrestre local (« approximativement de 0,19 [gauss] »), l'intensité du courant dans le galvanomètre de Thomson et l'approximative constance du rapport du produit des deux premières valeurs sur la troisième.

À la suite de cette découverte, le physicien américain, toujours efficacement conseillé par Rowland, affina son dispositif expérimental afin de formaliser, au moins « grossièrement », le phénomène mis à jour. Ainsi, dans une note finale écrite le samedi

(8) Ce galvanomètre, fruit d'un perfectionnement réalisé par William Thomson, baron Kelvin of Largs, est astatique – insensible au champ magnétique terrestre – et permet de mesurer des intensités très faibles, de l'ordre du nanoampère voire moins – l'une des mesures donnée par Hall est d'ailleurs de 0,85 nA. Compte tenu des intensités traversant ce galvanomètre et indiquées par Hall, la « grande résistance » du circuit de mesure de tension devait être de l'ordre de 500  $\Omega$  à 5 k $\Omega$  – sa valeur est en relation directe avec l'épaisseur de la feuille d'or comme nous le verrons. De tels ordres de grandeur sont donnés dans le catalogue d'appareils de mesure de Jules Carpentier qui dirigea les ateliers Rhumkorff de 1878 à 1921 [2]. Mais ce qui importe ici, c'est le rapport de l'intensité galvanométrique sur l'intensité du courant principal circulant dans le ruban d'or, rapport qui, toujours d'après les données de Hall, est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-8}$ .

22 novembre 1879, il affirme avec prudence qu'il est « *permis de dire que l'action de l'aimant crée dans le ruban de feuille d'or une nouvelle force électromotrice à angle droit de la force électromotrice primaire* » ([7], p. 292), la tension transversale – dite aujourd'hui tension de Hall  $U_H$  – qui en résulte étant proportionnelle à la densité de courant  $J$  dans le conducteur et au champ magnétique  $B$  appliqué.

Que nous apprend l'histoire de la découverte de l'effet Hall ?

- ◆ Tout d'abord que Maxwell avait à la fois raison et tort. Raison en ce qu'il faut bien distinguer la force mécanique s'exerçant sur le conducteur de la force agissant sur le courant qui le parcourt et raison en ce que la distribution de courant n'est *pratiquement* pas affectée par le champ magnétique dans le dispositif étudié par Hall. En revanche, il avait tort s'il pensait que le champ électrique restait le même en présence d'un champ magnétique<sup>(9)</sup>.
- ◆ Ensuite, il faut bien reconnaître que la découverte de l'effet Hall doit beaucoup aux conseils éclairés de Rowland qui, s'il n'avait pas été aussi « *débordé* » comme Hall le dit de lui, aurait probablement fait lui-même cette découverte – c'est d'ailleurs Rowland qui a véritablement conçu le montage expérimental utilisé par Hall. En ce sens, Rowland était un excellent directeur de thèse, ce qui n'ôte rien aux talents d'expérimentateur de Hall : en effet, faire cette découverte avec un conducteur *métallique* relève pour l'époque de la performance, la tension mesurée étant de l'ordre du dixième de microvolt<sup>(10)</sup>.
- ◆ Il convient par ailleurs d'attirer l'attention sur le fait que Hall prévoit l'existence du champ électrique transversal au courant *sans recourir à des charges électriques d'aucune sorte*. Ce champ résulte ici seulement de *l'incompressibilité* postulée pour le fluide

(9) D'autant qu'il existe un effet de *magnétorésistance géométrique* dans les métaux – certes extrêmement faible et indécélable dans la géométrie adoptée par Hall. Sur la magnétorésistance géométrique, voir par exemple ([12], p. 239) ou ([15], p. 241).

(10) Hall ne donne pas l'épaisseur de ses feuilles d'or et c'est regrettable. Il est probable que Hall a eu recours à des pellicules utilisées en *dorure à la feuille*, celles-ci ayant une épaisseur variant de 0,1  $\mu\text{m}$  – *feuilles d'or de Kanazawa* – à 1  $\mu\text{m}$  : cela ne pouvait que faciliter la mise en évidence de l'effet qui porte son nom. La tension la plus faible mesurée par Hall correspondait à un champ magnétique d'environ 0,2 T et à une intensité de courant circulant dans la feuille d'or de l'ordre de 25 mA. Avec une constante de Hall pour l'or de  $-0,074 \text{ mm}^3/\text{C}$ , nous pouvons en conclure que les tensions mesurées par Hall devaient être d'environ 4  $\mu\text{V}$  pour une épaisseur de 0,1  $\mu\text{m}$ , voire 0,4  $\mu\text{V}$  pour 1  $\mu\text{m}$  d'épaisseur. Ce sont les valeurs de l'intensité galvanométrique indiquées par Hall qui permettent de supputer que la résistance du circuit de mesure devait être de l'ordre de 5000  $\Omega$  – respectivement 500  $\Omega$  – dans le cas d'une épaisseur de 0,1  $\mu\text{m}$  – respectivement 1  $\mu\text{m}$ . Au final, il est raisonnable de penser que l'épaisseur de la feuille d'or insérée dans le circuit d'étude de Hall était plutôt de l'ordre du micromètre, la densité du courant dans cette feuille étant alors de l'ordre de 1  $\text{A}\cdot\text{mm}^{-2}$ .

électrique tout comme un champ de forces pressantes massiques se doit d'équilibrer le champ de pesanteur dans une canalisation hydraulique horizontale. Autrement dit, *Hall n'avait nul besoin de connaître la constitution du courant électrique pour rendre nécessaire le champ qui porte son nom.*

- ◆ Enfin, s'il est une découverte qui ne doit rien au hasard, c'est bien celle-ci. En l'occurrence, nous pouvons dire que Hall *fit* ou encore *inventa* son effet. D'une part en ayant une conception *a priori* du courant électrique – fluide incompressible – qui guida sa recherche. D'autre part en utilisant, toujours sur les conseils de Rowland, un ruban de feuille d'or suffisamment mince pour que la tension transversale puisse être mesurée – si ce ruban avait eu une épaisseur de 0,1 mm, la tension aurait été de l'ordre du nanovolt pour une même intensité et aurait été de ce fait indécélable<sup>(11)</sup>.

## 2. CRITIQUE DE L'INTERPRÉTATION USUELLE DE L'EFFET HALL

### 2.1. De l'interprétation d'usage de l'effet Hall

Dans un référentiel  $(R) = (O, x, y, z)$ , considérons donc un « barreau » métallique immobile – le ruban de Hall –, de longueur  $L$ , de largeur  $l$  et d'épaisseur  $h$ , parcouru par un courant électrique de densité  $\vec{J} = J\vec{u}_x$  avec  $J > 0$ , constitué d'électrons « libres » animés d'une vitesse moyenne  $\vec{v}_{e/R} = -\nu\vec{u}_x$  avec  $\nu > 0$  – cf. figure 4.

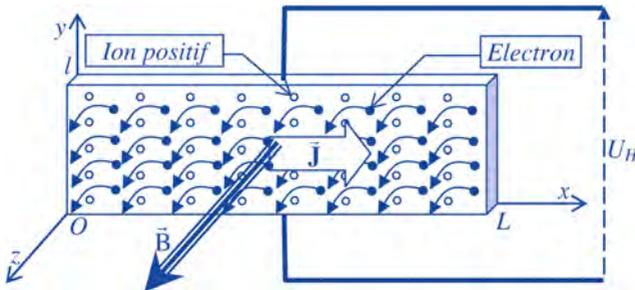


Figure 4 - Modélisation classique de l'effet Hall.

Les électrons sont représentés par des points noirs et les ions positifs associés par des points blancs.

Établissons alors un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  avec  $B > 0$  supposé uniforme. Que se passe-t-il ? Le mieux est de lire Edward Mills Purcell (1912-1997), prix Nobel de physique 1952 pour sa découverte de la résonance magnétique nucléaire et auteur

(11) À ce propos, Hall note dans son article que, s'il remplace son ruban d'or par un ruban de cuivre de 0,25 mm d'épaisseur, il n'observe aucune déviation stationnaire du galvanomètre ([7], p. 291).

du traité d'électromagnétisme du fameux *Cours de Berkeley* :

« [Sous l'action de la force magnétique de Lorentz], les électrons sont déviés vers le bas. Mais comme ils ne peuvent s'échapper du barreau, ils s'empilent en bas de celui-ci jusqu'à ce que l'excès de charge négative en bas... et l'excès correspondant de charge positive au sommet... créent un champ électrique... tel que la force vers le haut... compense exactement la force vers le bas... Dans l'état stationnaire (que l'on atteint très rapidement !), le mouvement est de nouveau horizontal en moyenne, et il existe à l'intérieur du métal ce champ électrique transverse. Ce champ crée une force dirigée vers le bas agissant sur les ions positifs. C'est ainsi que la force  $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$  est transmise au barreau. Le barreau exerce à son tour une force sur le support qui le tient ou, s'il n'y en a pas, est accéléré vers le bas. » ([16], p. 219).

C'est l'explication archétypale de l'effet Hall et force est de constater que celle-ci, séduisante de simplicité et de bon sens, fait consensus<sup>(12)</sup>. Mais, comme toujours, il faut se méfier des mirages de la séduction et ce qui nous pose problème ici, ce sont les charges surfaciques supposées à l'origine du champ de Hall...

## 2.2. Du régime transitoire dans l'effet Hall

Le déséquilibre électrique responsable du champ de Hall dans le conducteur ferait donc suite à un régime transitoire de courte durée. Mais que se passe-t-il durant ce régime ? Pour simplifier, supposons le courant initialement établi entre les pôles de l'électroaimant et modélisons l'établissement du champ magnétique par une évolution temporelle évidemment inductive – cf. figure 5,  $\tau$  représentant une constante de temps et  $B_\infty$  le champ magnétique stationnaire.

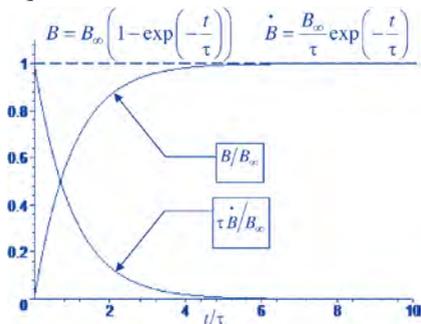


Figure 5 - Modélisation de l'établissement du champ magnétique.

(12) Pour un exposé érudit des premières interprétations de l'effet Hall, voir [3], p. 192-194. On retrouve l'interprétation consensuelle dans [1], [13] ou [14]. Nous y avons nous-mêmes sacrifié ([9], p. 689-696). *A contrario*, Feynman [6] ne parle à aucun moment de cet effet et *a fortiori* de son interprétation. C'est probablement parce qu'il tenait cet effet et l'origine des forces dites de Laplace pour parfaitement annexes et ressortissant à plus fondamental, à savoir l'approche relativiste de l'électromagnétisme.

La variation temporelle du champ magnétique s'accompagne alors de l'induction d'un champ électromoteur de Neumann  $\vec{E}_N$ . Toujours pour simplifier, supposons de plus que le champ magnétique localement uniforme présente une symétrie cylindrique.

En jauge de Coulomb – traduisant la conservation du flux du champ potentiel vecteur – et en symétrie cylindrique –  $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\}$  désignant la base du repérage cylindrique  $[r_p, \theta, z]$  – le champ électromoteur d'induction de Neumann présente une composante orthoradiale d'expression<sup>(13)</sup> :

$$\vec{E}_N = -r_p \dot{B} \vec{u}_\theta / 2$$

Nous constatons sur ce cas particulier – cf. figure 6 – que l'étude du régime transitoire d'établissement du champ magnétique n'est pas des plus simples et que le champ électrique induit peut être localement en sens inverse du champ électrique initial et ainsi pourrait éventuellement conduire à des distributions temporaires de charges de signe contraire à celles qui existeraient en régime permanent. Il apparaît donc que la figure 4 – que l'on retrouve pourtant dans de nombreux manuels – est difficilement recevable, d'autant qu'il faut s'entendre sur le régime transitoire précédant un « *régime stationnaire que l'on atteint très rapidement* »<sup>(14)</sup> : la durée du régime transitoire d'induction – disons de l'ordre de la milliseconde – est en effet considérablement plus longue que celle de l'établissement supposé des charges surfaciques – de l'ordre de la durée de relaxation des électrons « libres », soit  $10^{-14}$  s.

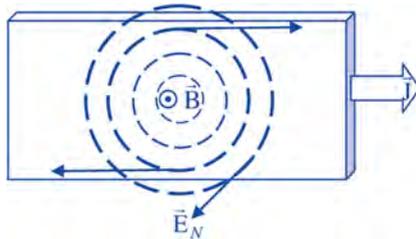


Figure 6 - Champ de Neumann transitoire apparaissant à l'établissement du champ magnétique.

### 2.3. De l'état mécanique des hypothétiques charges surfaciques

D'après l'interprétation usuelle, les électrons libres « s'empilent » en bas du conducteur... Or, à moins d'un hypothétique phénomène d'ionisation négative dans

(13) Pour ne pas alourdir cet article, nous laissons au lecteur scrupuleux le soin de vérifier ce résultat annexe.

(14) À ce propos, Hall signale que, s'il n'y a pas d'effet transverse stationnaire mesurable avec un ruban de cuivre de 0,25 mm d'épaisseur, il a néanmoins observé un courant induit « *au moment de la fermeture et de l'ouverture du circuit magnétique* » ([7], p. 291).

cette zone, les électrons sont censés rester « libres » et sont placés dans le champ électrique assurant la conduction du courant dans le conducteur – champ qui doit même « déborder » du conducteur compte tenu ici de la conservation de la composante tangentielle du champ électrique à l'interface conducteur/vide. En conséquence, ces électrons ne peuvent « s'empiler », mais doivent être évacués par le champ électrique. Et conséquence de la conséquence, si la charge surfacique positive invoquée sur la face  $y = l$  peut éventuellement être tenue pour statique, ce n'est pas le cas de la charge négative de la face  $y = 0$  qui se renouvelle en permanence. Mais alors, il faudrait introduire un courant surfacique... ce qui ne simplifie guère la question.

#### 2.4. D'une hypothétique charge surfacique quasi fantomatique

Intéressons-nous maintenant à la valeur de la charge surfacique qui générerait le champ de Hall d'expression suivante –  $\rho_N$  représentant la densité volumique d'électrons libres (et donc aussi d'ions positifs) et  $e > 0$  la charge élémentaire :

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_{e/R} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{J} \wedge \vec{B}}{\rho_N e} = -\frac{JB}{\rho_N e} \vec{u}_y = E_H \vec{u}_y$$

Compte tenu de la loi régissant la composante normale du champ électrique au passage d'une interface, la charge surfacique doit être en valeur absolue de l'ordre de  $\epsilon_0 |E_H|$  où  $\epsilon_0$  est la permittivité électrique du vide. Pour une densité de courant de  $1 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ , un champ magnétique de  $0,1 \text{ T}$  et une densité  $\rho_N$  de l'ordre de  $10^{29}$  porteurs libres par mètre cube – ordres de grandeur de l'expérience de Hall –, il vient :

$$\epsilon_0 |E_H| = \epsilon_0 \frac{JB}{\rho_N e} \approx 10^{-11} \frac{10^6 10^{-1}}{10^{29} 10^{-19}} = 10^{-16} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2} \approx 10^3 e \cdot \text{m}^{-2}$$

avec

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Autrement dit, en reprenant le ruban de feuille d'or de Hall dont la longueur soumise au champ magnétique était de l'ordre de dix centimètres et l'épaisseur de l'ordre du micromètre, il aurait réparti sur la tranche de cette feuille quelque chose de l'ordre de... un dix millième de charge électrique élémentaire !

Pour être compatible avec la quantification de la charge électrique, un tel résultat nécessite l'adjonction d'hypothèses supplémentaires au modèle :

- ◆ Cette distribution surfacique serait-elle obtenue par différence de deux distributions volumiques, celles des électrons libres et des ions positifs ? Et dans ce cas s'agirait-il alors d'un décalage spatial ou d'un effet de « compressibilité » agissant sur le courant d'électrons ?
- ◆ Cette distribution surfacique répondrait-elle à une statistique temporelle et/ou spatiale quant à l'apparition des quanta de charge sur les surfaces considérées ?

Quoi qu'il en soit, nous sommes très loin, ne serait-ce que quantitativement, de

l'idée simpliste d'électrons qui « s'empilent » sur une face.

## 2.5. De l'origine des forces dites de Laplace

Dans l'interprétation qu'il donne de l'effet Hall, Edward Mills Purcell est un peu rapide lorsqu'il dit que le champ de Hall agissant sur les ions positifs est responsable de la force transmise au barreau<sup>(15)</sup>. Certes, le champ de Hall s'exerce sur les ions positifs et chaque élément de volume  $dV$  contenant  $\rho_N dV$  de ces ions subit une force :

$$d\vec{F} = \rho_N dV e \vec{E}_H = (\vec{J} \wedge \vec{B}) dV$$

Cette force élémentaire s'identifie bien en valeur à une force dite de Laplace, *mais est-ce pour autant une force s'exerçant sur le conducteur ?* En aucune façon, car dans ce modèle il s'agit d'une force intérieure au conducteur.

Mais, toujours dans l'hypothèse de l'existence des charges surfaciques, un volume  $dV$  d'électrons libres subit de la part de celles-ci une force  $-d\vec{F}$  et donc, conformément au principe des actions réciproques, ces charges surfaciques solidaires du conducteur ressentent une force  $+d\vec{F}$ . Autrement dit, avec ce modèle, *les forces dites de Laplace sont exercées en réaction, donc indirectement, par le courant électrique sur le réseau ionique du conducteur* (cf. par exemple [1], p. 91).

Plaçons-nous maintenant dans un référentiel  $(R_0)$  où les électrons libres apparaissent immobiles en moyenne et où les ions positifs se déplacent à la vitesse  $-\vec{v}_{e/R} = v\vec{u}_x$ . Chaque élément de volume  $dV$  d'ions positifs subit alors *directement la force de Lorentz* :

$$\rho_N dV (e(-\vec{v}_{e/R}) \wedge \vec{B}) = (\vec{J} \wedge \vec{B}) dV = d\vec{F}$$

Ainsi, vues du référentiel  $(R_0)$ , *les forces dites de Laplace sont directement appliquées au réseau ionique du conducteur et s'identifient à celles exercées sur le courant électrique*. Voilà une asymétrie de description donnant matière à réflexion.

## 2.6. De l'origine du champ de Hall

Dans le modèle archétypal, le champ de Hall est donc créé par les distributions surfaciques déjà invoquées et nous avons bien au sein du conducteur :

$$\text{div} \vec{E}_H = 0$$

Mais, par pur jeu mathématique, utilisons l'expression du champ de Hall et développons sur tout l'espace la divergence de ce champ en assimilant la vitesse  $\vec{v}_{e/R}$  des

(15) Dans la suite, nous distinguerons dans le conducteur d'une part ses électrons libres et d'autre part le réseau ionique constitué d'ions positifs d'où sont issus ces électrons libres. Les forces dites de Laplace s'exerçant sur le conducteur sont en fait celles transmises au réseau ionique.

porteurs à un champ uniforme défini sur tout l'espace :

$$\operatorname{div} \vec{E}_H = \operatorname{div} \left( -\vec{v}_{e/R} \wedge \vec{B} \right) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left( -\vec{v}_{e/R} \right) + \vec{v}_{e/R} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \vec{v}_{e/R} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}$$

Le champ magnétique considéré étant généré par un courant autre que  $\vec{J}$ , le rotationnel de ce champ est bien nul au niveau du conducteur, mais reste régi par l'équation locale d'Ampère, si bien que,  $\vec{J}_B$  caractérisant la distribution de courant à l'origine de ce champ magnétique, il vient,  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  désignant les constantes électromagnétiques du vide et  $c_0$  la célérité de la lumière dans le vide :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_B \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E}_H = \mu_0 \vec{v}_{e/R} \cdot \vec{J}_B = \frac{\vec{v}_{e/R} \cdot \vec{J}_B / c_0^2}{\epsilon_0}$$

Cette loi locale, formellement identique à une loi de Gauss, nous indique que le champ de Hall trouverait sa source non pas dans les distributions surfaciques de l'interprétation usuelle, mais plutôt au niveau du courant générant le champ magnétique  $\vec{B}$ . Ce résultat mathématique a-t-il une quelconque légitimité physique ? Dans une approche purement classique : aucune. Mais, comme nous l'avons montré dans un autre travail [11], peut-être est-ce l'approche purement classique qui n'est pas légitime...

## 2.7. De la douteuse nécessité des hypothétiques charges surfaciques

Restons dans le référentiel  $(R_0)$  que nous dirons abusivement *lié* aux électrons de conduction. Dans la zone où existe le champ magnétique, quel est le champ électrique  $\vec{E}_0$  opérant dans ce référentiel ? La force électrique  $-e\vec{E}_0$  s'exerçant sur un électron « fixe » dans  $(R_0)$  – donc ne subissant pas de force magnétique – est équilibrée par la force d'interaction avec le réseau ionique, à savoir la force dissipative du modèle de Drude invariante dans un changement de référentiels. Cette dernière étant colinéaire au courant, le champ  $\vec{E}_0$  est lui-même colinéaire au courant, donc à l'axe  $Ox$  de la figure 4 (cf. pages précédentes). En conséquence, *relativement à  $(R_0)$ , il n'y a plus de composante électrique orthogonale au courant !* Nous serions de ce fait en présence de densités surfaciques de charge électrique dont l'effet devrait être intégralement compensé par un autre champ électrique. Se posent alors les questions suivantes : par rapport au référentiel  $(R_0)$ , quelle est l'origine de cet autre champ électrique ? Et du point de vue de  $(R_0)$ , ces charges surfaciques ont-elles vraiment leur raison d'être ? Et si ce n'est pas le cas, peuvent-elles en avoir une vues du référentiel  $(R)$  où leur crédibilité est sérieusement entamée par les arguments exposés précédemment ?...

Il est temps alors de s'interroger sur ce qui sous-tend peu ou prou ce modèle des charges surfaciques, à savoir, selon nous, les trois *a priori* théoriques suivants :

- ◆ Il est tout d'abord implicitement présupposé que le champ de Hall est *confiné* dans le conducteur, tout comme l'est celui entre les armatures d'un condensateur, ce qui *de facto* impose les charges surfaciques.

- ◆ Ensuite, champ électrique et champ magnétique sont tenus pour des entités autonomes, *indépendantes* l'une de l'autre.
- ◆ L'établissement du champ de Hall est conçu comme un processus *séquentiel* : la déviation magnétique des électrons libres implique l'accumulation des charges sur les faces, d'où l'apparition d'un champ électrique transverse, d'où la remise dans le « droit chemin » des électrons...

Si en revanche nous faisons table rase de ces présupposés et si nous retenons que la nécessité des charges surfaciques n'est guère flagrante relativement au référentiel  $(R_0)$ , il nous est alors loisible d'envisager une alternative pour interpréter l'effet Hall, alternative opportunément offerte par l'approche relativiste de la question.

### 3. APPROCHE RELATIVISTE DE L'EFFET HALL

#### 3.1. Transformation classique des grandeurs électromagnétiques

Dans un premier temps, restons dans le cadre de la relativité galiléenne, en étant pleinement conscients qu'il en résultera nécessairement des antinomies.

Dans la suite et comme précédemment, nous appellerons  $(R)$  le référentiel lié au conducteur et  $(R_0)$  celui lié aux électrons libres, le champ des vitesses  $\vec{v}_{R_0/R}(M)$  d'entraînement de  $(R_0)$  par rapport à  $(R)$  étant donc représenté par le vecteur  $\vec{v}_{e/R} = -v\vec{u}_x$ .

Dans le cadre proposé et compte tenu de l'invariance galiléenne de la charge volumique – nulle dans le conducteur lié à  $(R)$  –, il y a aussi invariance de la densité de courant électrique dans un changement de référentiels galiléens, le courant étant interprété comme résultant :

- soit du mouvement des électrons libres dans  $(R)$  :  $\vec{J} = \rho_N(-e)\vec{v}_{e/R}$  ;
- soit du mouvement des ions positifs dans  $(R_0)$  :  $\vec{J} = \rho_N e(-\vec{v}_{e/R})$ .

Par ailleurs, l'invariance de la force électromagnétique dans un changement de référentiel galiléen implique la transformation classique du champ électromagnétique, à savoir, l'indice 0 faisant référence aux grandeurs observées dans  $(R_0)$  (cf. [11], p. 1255-1256) :

$$\vec{B}_0 = \vec{B} \quad \vec{E}_0 = \vec{E} + \vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{B}$$

Le champ électrique observé dans  $(R_0)$  est donc égal à celui observé dans  $(R)$  augmenté du champ  $\vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{B}$  appelé champ de Lorentz résultant du mouvement de  $(R_0)$  par rapport à  $(R)$ .

La dernière relation peut aussi s'écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{B} = \vec{E}_0 + \vec{v}_{R/R_0} \wedge \vec{B}_0$$

Autrement dit, le champ électrique observé dans  $(R)$  est égal à celui observé dans  $(R_0)$  augmenté du champ de Lorentz résultant du mouvement de  $(R)$  par rapport à  $(R_0)$ . Dans cette optique, il convient de préciser que, quel que soit le référentiel d'observation et compte tenu du recours au champ des vitesses d'entraînement, *le champ de Lorentz considéré est défini en tout point où existe le champ magnétique.*

## 3.2. Effet Hall et forces de Laplace

### 3.2.1. Analyse relative au référentiel lié au conducteur

Dans le référentiel  $(R)$ , nous constatons que s'ajoute à la composante longitudinale au courant  $\vec{E}_0$  du champ électrique une composante transversale  $\vec{v}_{R/R_0} \wedge \vec{B}$  qui s'identifie au champ de Hall  $-\vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{B}$ . *Le champ de Hall se réduit donc au champ de Lorentz résultant du mouvement de  $(R)$  par rapport à  $(R_0)$ .*

À la différence de l'approche communément admise, ce champ de Hall n'est pas localisé à l'intérieur du conducteur, mais baigne totalement celui-ci en tant que champ de Lorentz. Les ions positifs sont donc soumis au champ de Hall, si bien que le conducteur subit maintenant directement le champ de forces volumiques dites de Laplace  $\vec{J} \wedge \vec{B}$  qui, malgré leur expression formelle, apparaissent ici comme des forces purement électriques<sup>(16)</sup>.

Considérons maintenant le circuit de mesure de la tension de Hall (cf. figure 7).

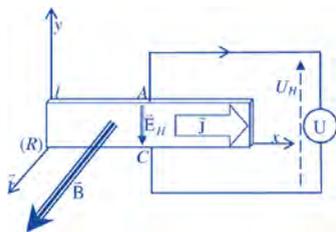


Figure 7 - Mesure de la tension de Hall dans le référentiel  $(R)$ .

Le régime étant stationnaire, la circulation du champ électrique sur le contour fermé  $AUCA$  est nulle, si bien que  $-E_H$  désignant la valeur algébrique du champ de Hall :

$$\oint_{AUCA} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0 = \int_{AUC} \vec{E} \cdot d\vec{OM} + \int_C^A \vec{E} \cdot d\vec{OM} \Rightarrow$$

(16) Au passage, souligner le caractère purement électrique des forces dites de Laplace permet de mieux comprendre pourquoi celles-ci peuvent « travailler » alors que les forces magnétiques de Lorentz s'exerçant sur une particule chargée ne travaillent pas.

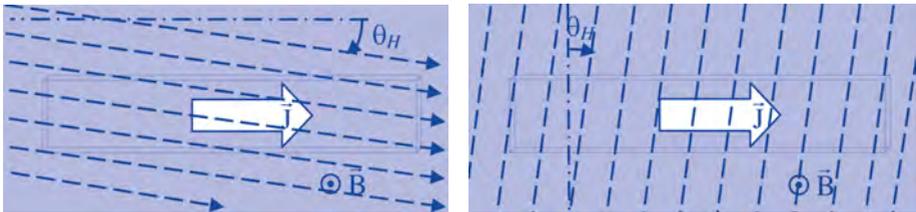
$$\int_{AUC} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = - \int_C^A \vec{E} \cdot d\vec{OM} = - \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{y} \vec{u}_y = - \int_0^l E_H dy = - E_H l = JBl / \rho_N e$$

« La circulation du champ électrique le long de la branche contenant le voltmètre » orientée de A vers C ([15], p. 295) représentant par définition la tension de Hall  $U_H$  mesurée – ici en convention récepteur – il s’ensuit le résultat bien connu :

$$U_H = \int_{AUC} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = JBl / \rho_N e$$

Au final, l’effet Hall se manifeste donc par une déclivité des lignes de champ électrique résultant de la présence du champ magnétique baignant le conducteur, cette déclivité s’accompagnant d’une inclinaison des équipotentielles comme schématisées sur la figure 8. L’importance de cette déclivité est éminemment exagérée sur cette figure. En effet, compte tenu des ordres de grandeur usuels de conductivité électrique pour les métaux, nous avons<sup>(17)</sup> :

$$\tan(\theta_H) = |E_H|/|E_0| = (JB/\rho_N e)/(J/\gamma_e) = \gamma_e B/\rho_N e \approx 10^7 \cdot 10^{-1}/10^{10} \Rightarrow \theta_H \approx 10^{-4} \text{ rad} !$$



Lignes de champ

Équipotentielles

Figure 8 - Déclivités de Hall observées dans le référentiel (R).

### 3.2.2. Analyse relative au référentiel lié aux électrons de conduction

Dans  $(R_0)$ , les électrons de conduction sont par définition « immobiles » et les

(17) En poursuivant le calcul dans le cadre du modèle de Drude, l’inclinaison  $\theta_H$  apparaît comme directement liée à la durée de relaxation  $\tau_e$  des électrons libres de masse  $m_e$  puisque nous avons :

$$\gamma_e = \rho_N e^2 \tau_e / m_e \Rightarrow \tan(\theta_H) = eB\tau_e / m_e \approx \theta_H$$

Par ailleurs, si nous désignons par  $I_H$  l’intensité dans le circuit de mesure de résistance  $R_u$ , le rapport de l’intensité de mesure à l’intensité du courant longitudinal est égal à :

$$I_H/I_0 = (U_H/R_u)/Jlh = |E_H|I/\gamma_e|E_0|lhR_u = B/\rho_N ehR_u$$

En prenant pour l’or une constante  $1/\rho_N e = 75 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$ , un champ magnétique de l’ordre de 0,2 T et une résistance de mesure de 500  $\Omega$  avec une épaisseur  $h$  de 1  $\mu\text{m}$ , ce rapport d’intensités est de l’ordre de  $3 \cdot 10^{-8}$  : c’est justement l’ordre de grandeur obtenu à partir des données de Hall dans son article (cf. note 8).

ions positifs ainsi que le dispositif de mesure sont animés de la vitesse  $-\vec{v}_{e/R}$  égale à la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_{R/R_0}$ . Le conducteur est dans ce cas baigné par le champ électrique  $\vec{E}_0$  qui, comme nous l'avons vu, est colinéaire à  $Ox$ . Il n'y a donc plus de composante transverse du champ électrique au niveau du conducteur. Toutefois les ions positifs et les porteurs de charge  $q$  du circuit de mesure en mouvement par rapport à  $(R_0)$  subissent maintenant la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\vec{v}_{q/R_0} \wedge \vec{B}_0 \equiv q\vec{v}_{R/R_0} \wedge \vec{B}_0 = -q\vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{B}_0 = q\vec{E}_H$$

La tension mesurée par le voltmètre représentant toujours la circulation du champ électrique ressenti par les porteurs du circuit de mesure le long de ce circuit dans son référentiel, il s'ensuit que l'indication donnée par le voltmètre vu de  $(R_0)$  est la même que celle vue de  $(R)$  comme il se doit<sup>(18)</sup>.

Arrivé à ce stade de l'étude, lorsqu'il s'agit de cerner la source du champ de Hall, l'approche purement galiléenne s'avère insuffisante, car sujette à antinomies comme nous l'avons montré à propos du champ de Lorentz dans un autre article [11]. C'est pourquoi il nous faut maintenant recourir au cadre relativiste einsteinien.

### 3.3. Effet Hall et relativité restreinte

Les référentiels  $(R_0)$  et  $(R)$  ayant été définis précédemment, rappelons la transformation de Lorentz appliquée à un champ électromagnétique – cf. [6] par exemple :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x_0} & E_y &= (E_{y_0} - vB_{z_0})\gamma(v) & E_z &= (E_{z_0} + vB_{y_0})\gamma(v) \\ B_x &= B_{x_0} & B_y &= (B_{y_0} + vE_{z_0}/c_0^2)\gamma(v) & B_z &= (B_{z_0} - vE_{y_0}/c_0^2)\gamma(v) \end{aligned} \quad \text{où } \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c_0)^2}}$$

Nous savons déjà que, dans le cas étudié, le champ magnétique vu de  $(R)$  est tel que  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  et que le champ électrique vu de  $(R_0)$  est de la forme  $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_{x_0}$ . Il s'ensuit tous calculs faits :

$$\vec{E} = E_0\vec{u}_x - vB\vec{u}_y = E_0\vec{u}_x + \vec{E}_H \quad \vec{B}_0 = B\vec{u}_{z_0}/\gamma(v)$$

La vitesse des porteurs libres étant de l'ordre de  $0,1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ , le coefficient  $\gamma(v)$  s'identifie à l'unité à...  $10^{-25}$  près<sup>(19)</sup> : autant dire que nous avons  $\vec{B} \simeq \vec{B}_0$ . Quant au champ de Hall, *il résulte directement et rigoureusement d'une transformation de Lorentz appliquée à la coexistence du champ magnétique et du champ électrique évalués dans le référentiel où les porteurs libres apparaissent fixes*. Autrement dit, le champ de Hall n'est qu'une mani-

(18) Certains verront peut-être en cela une tautologie, mais il ne nous semble pas inutile de vérifier que le principe de relativité est en l'occurrence bien respecté, d'autant que la tension de Hall s'interprète un tantinet différemment selon le référentiel considéré.

(19) Ce qui assure la quasi-invariance des vecteurs unitaires constituant la base des repères associés aux divers référentiels.



Soit encore, puisque le coefficient  $\gamma(v)$  vaut 1 à  $10^{-25}$  près :

$$\vec{J}_{B0} \approx \vec{J}_B \quad \rho_{B0} \approx v J_{Bx} / c_0^2$$

Ainsi, la bobine apparaît chargée électriquement dans le référentiel  $(R_0)$ , et cette charge volumique s'identifie à celle que, dans ([11], p. 1255), nous avons dénommée *charge volumique de Lorentz* associée au champ de Lorentz résultant du mouvement de  $(R_0)$  par rapport à  $(R)^{(20)}$ . Cette charge volumique est certes très faible, de l'ordre d'un quantum de charge pour 100 m d'un fil de section  $1 \text{ mm}^2$  constituant la bobine. Mais, comme nous l'avons montré dans [11], elle trouve sa justification dans la minuscule différence d'origine relativiste existant entre la charge volumique du réseau ionique positif et celle des électrons de conduction observées dans  $(R_0)$ .

Pour simplifier les calculs, remplaçons la distribution de courant volumique  $\vec{J}_B$  par une distribution de courant *surfâcique* équivalente du point de vue magnétique et donc de densité  $\vec{K}_B$  définie dans la base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  par (cf. figure 9B, page précédente) :

$$\vec{B} = \mu_0 n I_B \vec{u}_z \equiv \mu_0 K_B \vec{u}_z \Rightarrow \vec{K}_B = n I_B \vec{u}_\theta \approx \vec{K}_{B0}$$

Par transformation de Lorentz, cette densité de courant surfâcique  $\vec{K}_B$  est donc associée dans  $(R_0)$  à une charge surfâcique  $\sigma_{B0}$  d'expression :

$$\sigma_{B0}(\theta) \approx v K_{Bx} / c_0^2 = -v n I_B \sin(\theta) / c_0^2$$

Montrons alors que cette distribution crée un champ électrique directement opposé à la composante de Hall vue dans  $(R)$  afin de permettre au champ électrique vu dans  $(R_0)$  d'être localement colinéaire à  $\vec{u}_{x_0}$  au niveau du conducteur parcouru par le courant  $\vec{J}$ . Pour cela, rappelons les lois locales que nous avons établies dans [11] et qui régissent le champ  $-\vec{E}_H$  s'identifiant au champ de Lorentz résultant du mouvement de  $(R_0)$  par rapport à  $(R)$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(-\vec{E}_H) &= \operatorname{div}(\vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \vec{v}_{R_0/R} \cdot \vec{J}_B \\ \operatorname{rot}(-\vec{E}_H) &= \operatorname{rot}(\vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{B}) = -(\vec{v}_{R_0/R} \wedge \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

L'uniformité du champ  $-\vec{E}_H$  au sein de la bobine est bien conforme à ces deux lois locales puisque  $\vec{J}_B$  et  $\vec{B}$  y sont respectivement nul et uniforme. En tout point  $M_S$  au voisinage de la distribution de courant  $\vec{K}_{B2}$ , la nullité des champs de Lorentz hors bobine et la loi locale de Gauss impliquent,  $\vec{E}_\sigma(M_S)$  désignant le champ électrique intérieur à la bobine en  $M_S$  dû aux charges surfâciques observées dans  $(R_0)$  :

$$\forall M_S, \vec{E}_\sigma(M_S) \cdot \vec{u}_{r_p} = -\sigma_{B0}(\theta) / \epsilon_0 = \mu_0 v n I_B \sin(\theta) = v B \vec{u}_\gamma \cdot \vec{u}_{r_p} = -\vec{E}_H(M_S) \cdot \vec{u}_{r_p}$$

(20) Cette charge surfâcique s'identifie aussi à l'opposée de celle trouvée mathématiquement au sous-paragraphe 2.6.

En tout point  $M_S$  au voisinage de la distribution de courant  $\vec{K}_B$ , la nullité des champs de Lorentz hors bobine et la loi locale d'Ampère impliquent :

$$\vec{\text{rot}}(-\vec{E}_H) = -(\vec{\nabla}_{R_0/R} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \nu \frac{\partial B}{\partial x} \vec{u}_z = \nu \frac{dB}{dr_p} \frac{\partial r_p}{\partial x} \vec{u}_z = \nu \frac{dB}{dr_p} \cos(\theta) \vec{u}_z$$

En utilisant la technique habituelle d'obtention des lois de passage électromagnétique entre deux milieux recourant ici au théorème de Stokes, il vient compte tenu de la discontinuité radiale  $-B$  du champ magnétique<sup>(21)</sup> :

$$-\vec{E}_H \cdot (-\vec{u}_\theta) = -B\nu \cos(\theta) \Rightarrow -\vec{E}_H \cdot \vec{u}_\theta = \nu B \cos(\theta) = \nu B \vec{u}_y \cdot \vec{u}_\theta$$

En conséquence, la charge volumique  $\rho_{B0}$  est à l'origine d'un champ électrique annihilant dans  $(R_0)$  le champ de Hall  $\vec{E}_H$  vu du référentiel  $(R)$ <sup>(22)</sup>.

Reste à justifier la déclivité du champ électrique vu de  $(R)$ . Il faut se souvenir que l'excitation électrique instantanée en tout point  $M$  du vide  $\epsilon_0 \vec{E}(M, t)$  résultant d'une distribution de sources électromagnétiques représentée par des éléments de charge  $dq(N, t)$  et de courant électriques  $d\vec{\Gamma}(N, t)$  a pour expression<sup>(23)</sup> (cf. [10], p. 116) :

$$\epsilon_0 \vec{E}(M, t) = \int_{Distr.} \frac{-1}{4\pi NM} \left( \left[ \vec{\text{grad}}_N dq(N, t_r) \right]_t + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} d\vec{\Gamma}(N, t_r) \right) \quad \text{avec } t_r = t - \frac{NM}{c_0}$$

Or cette distribution n'est pas la même qu'il y ait ou non un champ magnétique extérieur au niveau du conducteur siège de l'effet Hall – ne serait-ce que parce qu'il faut un générateur électrique pour alimenter la source du champ  $\vec{B}$  en plus de celui alimentant le conducteur, sans parler des fils de connexion. En ce sens, nous pouvons donc dire que la distribution de sources électromagnétiques générant le champ électromagnétique  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$  s'adapte – de façon minimale dans le cas présent – afin que les porteurs du courant  $\vec{J}$  conservent un mouvement colinéaire au conducteur... ce qui est dans le droit fil de l'intuition initiale d'Edwin Herbert Hall qui s'appuyait sur l'analogie hydrodynamique où le champ de pression s'adapte au courant dans une canalisation placée dans un champ de pesanteur.

- (21) À qui serait choqué par cette discontinuité de la composante tangentielle du champ  $-\vec{E}_H$ , nous rappelons que la continuité de cette composante est inféodée à l'absence de discontinuité temporelle du champ magnétique. Or, dans le cas présent, il y a discontinuité du champ magnétique d'origine convective résultant de la traversée du courant surfacique (cf. [11], p. 1259).
- (22) L'opposée de cette charge volumique était qualifiée par Lorentz de *compensation* (cf. [11], p. 1258) et s'identifie à celle trouvée mathématiquement au sous-paragraphe 2.6. Dans une optique pré-relativiste, Lorentz considérait en quelque sorte qu'il fallait compenser la charge portée par la bobine vue du référentiel  $(R_0)$  pour qu'elle apparaisse neutre dans  $(R)$ .
- (23) Expression d'ailleurs équivalente à celle donnée par Oleg J. Jefimenko pour le champ électrique (cf. [10], p. 122-123).

## CONCLUSION

Que l'on ne s'y trompe pas ! Nous n'avons pas démontré que les charges surfaciques du modèle usuel d'interprétation de l'effet Hall n'existent pas : nous avons seulement remis en cause les présupposés théoriques qui les impliquent. Il en découle que ces charges surfaciques apparaissent comme *superflues* – comme disait Einstein parlant de l'éther –, ce qui nous conduit à les évacuer d'un coup de rasoir d'Ockham. Par ailleurs, que l'approche relativiste s'avère en l'espèce plus *self-consistent* que l'approche usuelle montre une fois de plus que la relativité restreinte n'est pas réservée à la physique des hautes énergies : *elle trouve déjà nécessité dans l'existence de l'effet Hall et des forces dites de Laplace.*

Toutefois, le modèle relativiste développé ici a lui aussi ses insuffisances. Déjà, il faut rendre compatibles la quantification de la charge électrique et l'extrême petitesse de la charge volumique à l'origine de l'effet Hall. De plus, la comparaison entre les constantes de Hall mesurées expérimentalement et la constante théorique  $1/\rho_N e$  du modèle – où chaque atome du conducteur « libère » un électron – ne plaide que timidement en faveur de ce dernier : si les métaux alcalins – au lithium près – le valident relativement correctement, c'est loin d'être le cas pour les autres métaux<sup>(24)</sup>. Pire ! Avec certains métaux comme le fer, le béryllium, le cadmium ou le tungstène, les porteurs du courant de conduction ne sauraient être des électrons libres puisqu'ils apparaissent comme *positifs*. Dans l'état actuel des choses, seule la physique statistique et quantique, et plus précisément la théorie des bandes, est à même d'expliquer de tels résultats expérimentaux...

Comme quoi, si besoin est, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que nos modèles didactiques se doivent d'être maniés avec prudence et humilité, ne serait-ce qu'en les chapeautant d'un sage « *tout se passe comme si... mais est-ce que ça se passe vraiment comme ça ?* ».

## BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] J.-P. Barrat, *Électromagnétisme et relativité restreinte*, Paris : Ediscience, 1972.
- [2] J. Carpentier, *Catalogue 1907-Appareils courants*, Ateliers Ruhmkorff.  
Ce catalogue peut être consulté en ligne sur le site : <http://cnum.cnam.fr>
- [3] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein*, Oxford : Oxford University Press, 2002.

(24) L'écart relatif entre les prédictions du modèle et les mesures expérimentales est de 20 % pour le cuivre, 30 % pour l'or et va jusqu'à atteindre 60 % pour l'aluminium (cf. Kittel, [12]).

- [4] O. Darrigol, *Les équations de Maxwell, de MacCullagh à Lorentz*, Paris : Belin, 2005.
- [5] P. Drude, “Zur Elektronentheorie der Metalle, I. Teil”, *Annalen der Physik*, vol. I, p. 566–613, 1900.  
Cet article peut être consulté en ligne par le biais du site de la Bibliothèque nationale de France (BNF) : <http://gallica.bnf.fr>
- [6] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Le cours de physique de Feynman - Électromagnétisme 1 et 2*, traduit par A. Crémieu et M.L. Duboin, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [7] E.H. Hall, “On a New Action of the Magnet on Electric Currents”, *American Journal of Mathematics*, vol. 2, p. 287–292, 1879.  
Cet article peut être consulté en ligne sur le site :  
<http://www.stenomuseet.dk/skoletj/elmag/hall.html>
- [8] H. Helmholtz, “Bericht betreffend Versuche uüber die elektromagnetische Wirkung elektrischer Convection ausgeführt von Hrn. Henry A. Rowland der J. Hop-kins’ Universität in Baltimore”, *Annalen der Physik*, vol. CLVIII, p. 487–493, 1876.  
Cet article peut être consulté en ligne par le biais du site de la Bibliothèque nationale de France (BNF) : <http://gallica.bnf.fr>
- [9] B. Jech, *Bible de physique, PC-PC\**, Paris : Ellipses, 2004.
- [10] B. Jech, « Variation sur le potentiel vecteur VII : sur la base des potentiels », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 100, n° 889 (2), p. 107–123, décembre 2006.
- [11] B. Jech, « Le champ de Lorentz : un champ électrique comme un autre », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 108, n° 967, p. 1253–1264, octobre 2014.
- [12] C. Kittel, *Introduction à la physique de l’état solide*, Paris : Dunod, 1970.
- [13] J. Clerk Maxwell, *A treatise on Electricity & Magnetism - vol. 2*, New York : Dover, 1954.
- [14] R.A. Millikan, *L’électron*, Paris : Librairie Félix Alcan, 1926.
- [15] J.-Ph. Pérez, R. Carles et R. Fleckinger, *Électromagnétisme, vide et milieux matériels*, Paris : Masson, 1991.
- [16] E. M. Purcell, *Berkeley-Cours de physique - volume II, électricité et magnétisme*, traduit par C. Guthmann et P. Lallemand, Paris : Armand Colin, 1973.
- [17] H.A. Rowland, “On the magnetic effect of the electric convection”, *American Journal of Science*, XV, p. 30–38, 1878. Cet article fait aussi partie des *Physical Papers* de Rowland (p. 128–137) et peut être consulté en ligne sur le site <http://www.archive.org>

[18] J.J. Stoney, “Of the ‘Electron’, or Atom of Electricity”, *Philosophical Magazine*, XXXVIII, p. 418-420, 1894.

Cet article peut être consulté en ligne sur le site : <http://web.lemoyne.edu/~giunta>

[19] J.J. Thomson, “Cathode rays”, *Philosophical Magazine*, XLIV, p. 293-316, 1897.

Cet article peut être consulté en ligne sur le site : <http://web.lemoyne.edu/~giunta>

### **Complément de l'article**

*Cet article comporte un complément nommé :*

◆ *Effet Hall 1879.pdf*

*Il est disponible sous la forme d'un fichier zippé 09710201.*



**Bruno JECH**

*Professeur de physique en TSI2*

Lycée Léonce Vieljeux

La Rochelle (Charente-Maritime)