

COURS DE PHYSIQUE

ÉLECTROCINÉTIQUE


JIMMY ROUSSEL

2026

Cours d'électrocinétique – femto-physique.fr

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2026 Jimmy Roussel

 Ce document est sous licence *Creative Commons* «Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 4.0 International (CC BY-NC 4.0)».

Pour plus d'informations : creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Ce document est réalisé avec l'aide de *KOMA-Script* et \LaTeX en utilisant la classe *kaobook*.

1^{re} édition – Mars 2016

Version en ligne – femto-physique.fr/electrocinetique

Preface

Ce cours s'intéresse à l'électrocinétique, c'est-à-dire à l'étude de la répartition du potentiel et du courant électrique au sein d'un circuit électrique. On distinguera les régimes stationnaires des régimes variables que l'on placera dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Le filtrage passif et actif sont abordés, et un chapitre est consacré aux amplificateurs linéaires intégrés.

Ce cours s'adresse plus particulièrement à des étudiants de premier cycle universitaire ou élèves des CPGE. Les candidats au CAPES ou à l'Agrégation peuvent y trouver également matière à réflexion.

J'ai essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des exemples ou de simples exercices. Mais pour un entraînement plus poussé, j'invite le lecteur à se procurer l'eBook suivant :

- ▶ *Électrocinétique – 70 exercices et problèmes corrigés.*

disponible à l'adresse payhip.com/femto

Jimmy Roussel

Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
1 ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES EN RÉGIME CONTINU	1
1.1 Lois de l'électrocinétique	1
1.2 Phénomènes résistifs	4
1.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif	7
1.4 Méthodes de résolution	11
2 CONDENSATEURS ET BOBINES	17
2.1 Condensateur électrique	17
2.2 Bobine d'induction	20
3 RÉGIMES TRANSITOIRES	25
3.1 Généralités	25
3.2 Décharge d'un condensateur	27
3.3 Circuit RL	29
3.4 Oscillateur RLC	31
4 RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ	35
4.1 Signaux périodiques	35
4.2 Notion d'impédance et d'admittance	40
4.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé	43
5 FILTRAGE PASSIF	47
5.1 Fonction de transfert	47
5.2 Filtrage passe-haut	51
5.3 Filtrage passe-bas	55
5.4 Filtre passe-bande	59
5.5 Stabilité	61
6 L'AMPLIFICATEUR LINÉAIRE INTÉGRÉ	65
6.1 Présentation de l'ALI	65
6.2 Montages courants en régime linéaire	68
6.3 Filtrage actif	71
6.4 ALI en régime saturé	75
Pour en savoir plus	81

Table des figures

1.1	Les différentes conventions	2
1.2	Représentation d'une tension	3
1.3	maille d'un circuit orientée par le sens de parcours positif indiqué.	3
1.4	Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique.	5
1.5	Réseau constitué de deux résistances	5
1.8	Pont diviseur de tension	6
1.6	Conducteurs ohmiques en série.	6
1.7	Conducteurs ohmiques en parallèle.	6
1.9	Pont diviseur de courant	7
1.10	Source idéale de tension : schéma et caractéristique	7
1.11	Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire.	8
1.12	Puissance produite en fonction du courant débité.	8
1.13	Source de courant idéale : schéma et caractéristique.	8
1.15	Puissance fournie par une source de courant	9
1.14	Source réelle de courant : schéma et caractéristique.	9
1.16	Équivalence Thévenin-Norton.	9
1.17	Batterie en charge.	10
1.18	Moteur à courant continu	10
1.19	Charge d'une batterie.	11
1.20	Circuit étudié.	12
1.21	Circuit étudié.	13
1.22	Théorème de Millman	15
1.23	Circuit étudié.	15
2.1	Schéma électrique du condensateur idéal.	17
2.2	Montage étudié.	18
2.3	Deux condensateurs associés en parallèle.	19
2.4	Deux condensateurs associés en série.	19
2.5	Fabrication d'un condensateur plan réel.	20
2.6	Modélisation d'un condensateur réel.	20
2.7	Induction	21
2.9	Joseph Henry (1797 - 1878).	22
2.8	Représentation d'une bobine idéale.	22
2.10	Modélisations d'une bobine.	23
3.1	Montage étudié.	25
3.2	Régime transitoire observé à l'ouverture de l'interrupteur.	25
3.3	Montage RC.	27
3.4	Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge.	28
3.5	Montage R-L.	29
3.6	Évolution du courant et de la tension inductive.	30
3.7	Montage RLC série.	31
3.8	Circuit pour $t > 0$.	31
3.10	Régime apériodique.	32
3.9	Régime pseudo-périodique.	32
3.11	Régime critique.	33

4.1	Caractéristiques d'un signal périodique.	35
4.3	Déphasage.	36
4.2	Signal sinusoïdal.	36
4.4	Deux signaux sinusoïdaux déphasés de ϕ en mode XY.	37
4.5	Représentation de Fresnel	38
4.6	Montage RLC.	39
4.7	Établissement du régime sinusoïdal (paramètres : $\omega = 0,35\omega_0$ et $Q = 10$).	39
4.8	Impédances : représentations de Fresnel.	41
4.9	Exemple de circuit avec sa représentation complexe.	42
5.1	Filtre.	47
5.2	Quadripôle électronique.	48
5.3	Filtre RC.	48
5.4	Types de filtre souvent rencontrés.	49
5.5	Bande passante.	49
5.6	Diagramme de Bode d'un filtre RC. Les traits oranges correspondent aux comportements asymptotiques.	50
5.7	Élimination de la composante continue d'un signal triangulaire	52
5.8	Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre avec $G_0 = 3,2$	53
5.9	Exemples de filtres passe-haut du premier ordre.	53
5.10	Dérivation d'un signal triangulaire à l'aide d'un filtre passe-haut	54
5.11	Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut de Butterworth d'ordre 3.	54
5.12	Exemple de filtre passe-haut du troisième ordre.	55
5.13	Exemples de filtres passe-bas du premier ordre.	56
5.14	Filtre passe-bas d'ordre 3.	58
5.15	Diagramme de Bode associé au filtre passe-bande du second ordre pour $Q = 5$ et $G_0 = 1$	59
5.16	Déphasage introduit par un filtre passe-bande avec $Q = 5$	59
5.17	Sélection de la seconde harmonique d'un signal périodique	60
5.18	Quadripôle RLC.	60
5.19	Quadripôle RLC avec un signal de sortie recueillie aux bornes du condensateur.	60
5.20	Diagramme de Bode du filtre RLC avec un signal prélevé aux bornes de C et $Q = 5$	61
5.21	Filtre réjecteur à l'aide d'un circuit RLC.	63
6.1	Amplificateur Linéaire Intégré 741CN	65
6.2	Schéma de l'ALI. L'alimentation est ici représentée, mais par la suite elle sera omise.	65
6.3	Caractéristique d'un ALI.	66
6.4	À gauche : schéma de l'ALI idéal. À droite : sa caractéristique.	66
6.5	Rétroaction sur l'entrée inverseuse.	67
6.6	Théorème de Millman	67
6.7	Montage suiveur.	68
6.8	Source réelle branchée sur une résistance de charge.	68
6.9	Montage amplificateur inverseur.	69
6.10	Montage soustracteur.	69
6.11	Montage intégrateur.	70
6.12	Montage dérivateur.	71
6.13	Filtre passe-bas du premier ordre.	72
6.14	Filtre passe-bande d'ordre deux.	72
6.15	Diagramme de Bode du montage de la FIG. 6.14.	73
6.16	Structure de Sallen et Key.	73
6.17	Filtre passe-bande de Sallen et Key.	74
6.18	Compateur inverseur	76

6.19	Caractéristique du comparateur inverseur.	76
6.20	Comparateur inverseur à hystérésis.	76
6.21	Cycle d'un comparateur inverseur à hystérésis.	77
6.22	Comportement vis-à-vis d'un signal de dérive pollué par une fluctuation alternative (en bleu). Le signal de sortie est en orange. Comparaison entre un comparateur simple (à gauche) et un comparateur à hystérésis (à droite). Le seuil est fixé à 0V et l'hystérésis à $\pm 2V$	77
6.23	Oscillateur à relaxation étudié	77
6.24	Evolution de la tension capacitive et de la sortie de l'ALI au cours du temps. Ici le seuil de basculement est $\pm 4V$ et la période $T = 20\text{ ms}$ (c'est-à-dire $\tau = 18,3\text{ ms}$ et $R_2/R_1 = 2,75$). . .	78

Liste des tableaux

1.1	Puissance électrique : quelques ordres de grandeur.	4
4.1	Quelques dipôles linéaires et leur impédance.	40
6.1	Gain différentiel de quelques ALI.	66

ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES EN RÉGIME CONTINU

1

Comment courants et potentiels électriques se répartissent au sein d'un circuit électrique ? C'est à cette question que ce cours entend répondre, sachant qu'on limitera notre propos aux réseaux électriques linéaires en régime continu. En effet, ces réseaux ont le bon goût de mener à des équations simples à résoudre.

Version en ligne

[https://femto-physique.fr/electrocinetique/
etude-des-reseaux-electriques.php](https://femto-physique.fr/electrocinetique/etude-des-reseaux-electriques.php)

1.1 Lois de l'électrocinétique

Les lois de l'électrocinétique ou **lois de Kirchhoff**¹ se résument en deux lois : la *loi des nœuds* et la *loi des mailles*.

Introduction

Un **réseau électrique** (ou circuit électrique) est un ensemble d'éléments présentant des propriétés électriques, reliés entre eux par des conducteurs que l'on considérera parfaits (conductivité infini). Les lois de l'électricité permettent de trouver la façon dont les courants et les potentiels électriques se répartissent au sein de ce circuit.

Lorsque les grandeurs électriques (tensions et intensités électriques) ne varient pas dans le temps, on parle de **régime continu**; le **régime variable** désigne la situation contraire.

En régime variable, les fluctuations de courant se propagent à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. Pour des circuits de taille raisonnable, la durée de propagation τ est très petite devant le temps caractéristique T des fluctuations (période du signal s'il est périodique). Il est alors légitime de négliger τ devant T ; c'est ce qu'on appelle l'*approximation des régimes quasi-stationnaires*.

Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)

Nous admettrons que les lois des régimes permanents restent valables en régime variable si l'on peut considérer les phénomènes de propagation négligeables. Notamment, dans une branche d'un circuit, à un instant donné, le courant a la même intensité en tout point.

Un **dipôle électrocinétique** est une partie d'un circuit qui peut être reliée au reste du circuit par deux fils. On décrit le comportement d'un

1.1 Lois de l'électrocinétique	1
Introduction	1
Loi des nœuds	2
Loi des mailles	2
Puissance électrique	4
1.2 Phénomènes résistifs	4
Loi d'ohm - effet Joule	4
Association de résistances	5
Ponts diviseurs	6
1.3 Dipôles actifs	7
Source de tension	7
Source de courant	8
Sources de Thévenin- Norton	9
Récepteur actif	9
Loi de Pouillet	11
1.4 Méthodes de résolution	11
Utilisation de la loi des mailles	11
Équivalence Thévenin- Norton	12
Théorème de superposition	13
Théorème de Millman	14

¹ : **Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)** : physicien allemand qui énonça les lois relatives au courant électrique dans les circuits alors qu'il était encore étudiant. On lui doit surtout des avancées en spectroscopie.

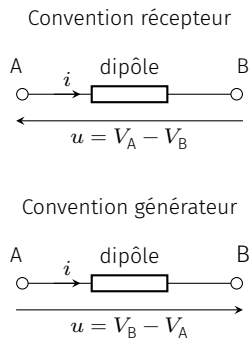


FIG. 1.1 : Les différentes conventions

dipôle par sa relation courant-tension ($i = f(u)$) dans une convention précisée. Il en existe deux :

- ▶ dans la convention récepteur, si le courant algébrique est orienté dans le sens AB, alors $u = V_A - V_B$;
- ▶ dans la convention générateur, si le courant est orienté dans le sens AB, alors $u = V_B - V_A$.

Dans ce chapitre nous limitons notre propos à l'étude de dipôles électrocinétiques dont la relation entre u et i est, soit linéaire, soit affine ($i = a \times u + b$). En effet, l'objectif est avant-tout de se familiariser avec les méthodes de résolutions.

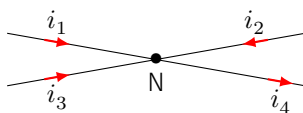
Loi des nœuds

Dans chaque branche d'un réseau électrique, on définit un sens positif (le choix est arbitraire!) du courant et une intensité algébrique i . Si $i > 0$, le courant circule dans le sens positif; si $i < 0$, le courant circule dans le sens opposé.

Un nœud est la rencontre d'au moins trois conducteurs électriques. Considérons n branches de conducteurs liées par un nœud N. Définissons i_k , l'intensité algébrique du courant de la k^{e} branche. La loi des nœuds traduit la conservation de la charge en régime stationnaire et exprime le fait que la charge ne peut pas s'accumuler en N : le courant électrique qui arrive en N doit être compensé par le courant qui sort. Cette loi, rigoureusement vérifiée en régime continu, est admise en régime variable dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

Loi des nœuds

En chaque nœud d'un circuit, on a $\sum_{k=1}^n \epsilon_k i_k = 0$ où $\epsilon_k = +1$ quand le courant est entrant et où $\epsilon_k = -1$ dans le cas contraire.



Exemple

Considérons le schéma ci-contre. La loi des nœuds exprimée en N donne

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad \text{soit} \quad i_4 = i_1 + i_2 + i_3$$

ce qui traduit bien le fait que le courant qui arrive en N est égale au courant qui en sort.

Loi des mailles

Le transport électrique est assuré grâce aux forces électrostatiques. On peut dès lors définir un potentiel électrique en chaque point du circuit. Lorsque le potentiel électrique est le même partout, le réseau est à l'équilibre et n'est le siège d'aucun courant électrique. En revanche, lorsque le potentiel électrique n'est plus uniforme, le conducteur n'est plus à l'équilibre ce qui génère un courant électrique (qui

tente de rétablir l'équilibre). Aux extrémités d'une branche il existe alors une tension qui dépend du courant électrique et de la nature du dipôle traversé par ce courant. Il est traditionnel de représenter une tension $u_{AB} = V_A - V_B$ par une flèche allant de B vers A.

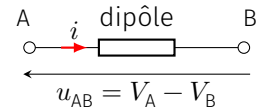


FIG. 1.2 : Représentation d'une tension

Les tensions qui règnent dans un circuit obéissent à quelques contraintes physiques. En effet, si l'on parcourt un circuit fermé (on parle de maille) en partant d'un nœud N pour revenir à ce même nœud, on doit trouver une tension nulle en vertu du caractère conservatif du champ électrique ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$). Autrement dit, si l'on décompose le circuit \mathcal{C} en n branches adjacentes on aura :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0$$

où u_k est la tension qui règne aux extrémités de la k^e branche. Cette loi est à appliquer si toutes les tensions sont orientées dans le même sens, ce qui n'est pas toujours le cas à cause des différentes conventions choisies pour les dipôles, c'est pourquoi on retiendra la règle suivante :

Loi des mailles

Prenons une maille et choisissons arbitrairement un sens de parcours. Visitions toutes les branches de la maille et associons un coefficient $\epsilon_k = +1$ à la tension rencontrée lorsqu'elle est orientée (sa flèche représentative) dans le sens de parcours et un coefficient $\epsilon_k = -1$ lorsque la tension rencontrée est orientée dans l'autre sens. La loi des mailles se traduit alors par

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k = 0 \tag{1.1}$$

Exemple

Dans le circuit ci-contre, appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens indiqué. On trouve

$$1 \times u_{BC} + 1 \times u_{AB} - 1 \times u_{AC} = 0 \text{ soit } u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$$

On retrouve d'ailleurs une loi identique à celle de Chasles propre aux vecteurs.

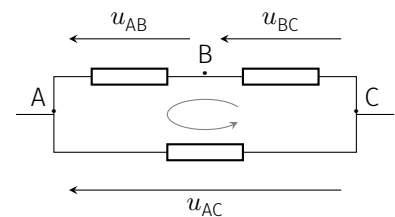


FIG. 1.3 : maille d'un circuit orientée par le sens de parcours positif indiqué.



ligne de masse ligne de terre

Il existe une indétermination du potentiel; ceci reste vrai au sein d'un réseau électrique. Cependant, une convention souvent rencontrée consiste à poser l'origine du potentiel au niveau du pôle - de l'alimentation. Ce potentiel de référence est appelée **masse du circuit**.

Un équipement sous tension présente, en général, une connexion physique avec la terre. Elle permet de protéger l'utilisateur et également d'évacuer les courants induits par la foudre. Cependant, il ne faudrait pas confondre ligne de terre et ligne de masse, car le potentiel de la terre n'est pas nécessairement constant et sa fonction est uniquement liée à la sécurité.

TAB. 1.1 : Puissance électrique : quelques ordres de grandeur.

électronique μW - mW	lampe de poche W	consommation des français en hiver 100 GW	centrale électrique GW	moteur TGV MW
---	---------------------	--	---------------------------	------------------

2 : **James Watt (1736-1819)** : ingénieur britannique, dont les améliorations sur la machine à vapeur furent une étape clé dans la révolution industrielle.

Puissance reçue par un dipôle électrocinétique

On appelle $\mathcal{P}(t)$ la puissance électrique reçue à l'instant t par un dipôle électrocinétique. La puissance électrique se mesure en **watt** (symbole : W) en hommage à James Watt² et on rappelle que

$$1 \text{ W} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$$

Entre t et $t + dt$, la quantité de charge $dq = i(t) dt$ arrive en une extrémité du dipôle (point A) pendant que la même quantité – nous sommes en régime stationnaire ou quasi-stationnaire – en sort par l'autre extrémité (point B). Cette quantité de charge possède une énergie électrique $\mathcal{E}_p(A) = dqV_A$ en A et $\mathcal{E}_p(B) = dqV_B$ en B. Remarquons qu'entre A et B l'énergie des charges n'a pas changé du fait que la distribution des charges et du potentiel est la même entre t et $t+dt$. Autrement dit, d'un point de vue énergétique, tout se passe comme si l'on avait transporté la charge dq de A en B. Pendant ce transport la charge perd une énergie potentielle $dqV_A - dqV_B$ qu'elle cède intégralement au dipôle. Celui-ci reçoit donc une quantité d'énergie

$$\delta W = dqV_A - dqV_B = i(t) u_{AB}(t) dt \quad (1.2)$$

Puissance électrique reçue par un dipôle

La puissance électrocinétique reçue (l'énergie reçue par unité de temps) par un dipôle D à l'instant t , soumis à une tension $u(t)$ et traversé par un courant d'intensité $i(t)$ vaut, *en convention récepteur*,

$$\mathcal{P}(t) = u(t) i(t) \quad (1.3)$$

Si $\mathcal{P}(t) > 0$, le dipôle absorbe effectivement, à l'instant t , de l'énergie électrique. On dit que le dipôle a un caractère **récepteur**. Cette énergie reçue par le dipôle est soit stockée, soit convertie sous une autre forme (effet Joule dans une résistance, énergie mécanique dans un moteur).

Si $\mathcal{P}(t) < 0$, le dipôle fournit effectivement de l'énergie électrique; on dit que le dipôle a un caractère **générateur** (ex : batterie).

1.2 Phénomènes résistifs

Loi d'ohm - effet Joule

[1] : ROUSSEL (2016), *Conducteurs électriques*

Comme on l'a vu en électromagnétisme[1], un conducteur ohmique obéit à la loi d'Ohm

Loi d'Ohm

$$u(t) = R i(t) \quad [\text{Convention récepteur}] \quad (1.4)$$

où R désigne la résistance du conducteur ohmique dont la valeur dépend de la géométrie et de la conductivité du matériau conducteur.

Rappelons que R s'exprime en ohm (symbole Ω). La caractéristique $i = f(u)$ est donc une droite passant par l'origine.

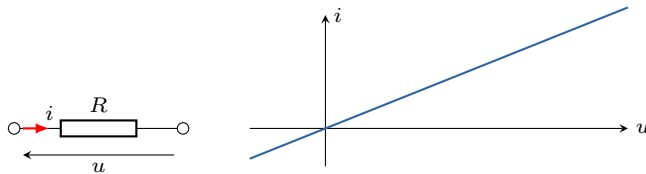


FIG. 1.4 : Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique.

Un circuit uniquement composé de résistances ne peut pas produire de courant. On dit que le conducteur ohmique est un **dipôle linéaire passif**. Par exemple, si l'on branche deux résistances ensemble, la loi des mailles donne

$$u_1 + u_2 = 0$$

soit

$$R_1 i + R_2 i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = 0$$

Aucun courant ne circule et par conséquent tous les conducteurs sont au même potentiel. On retrouve une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.

La puissance reçue par un conducteur ohmique vaut

$$\mathcal{P} = u i = R i^2 > 0 \quad \heartsuit \quad (1.5)$$

Le conducteur ne peut que recevoir de l'énergie électrique, sans pouvoir en fournir. On parle alors de *récepteur* électrique. En revanche cette énergie électrique est convertie essentiellement sous forme de chaleur si le conducteur n'est pas thermiquement isolé. En effet, si le conducteur est maintenu à température et pression constantes, le premier principe de la thermodynamique donne, pendant la durée τ :

$$\Delta H = Q_p + W_{\text{elec}} = Q_p + \int R i^2 dt = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_p = - \int R i^2 dt$$

Cette dissipation de l'énergie électrique sous forme de chaleur porte le nom d'*effet Joule*. Cet effet est mis à profit dans les bouilloires électriques par exemple.

Association de résistances

Tout dipôle constitué uniquement de résistances équivaut à une résistance équivalente R_{eq} . Intéressons-nous à deux configurations simples.

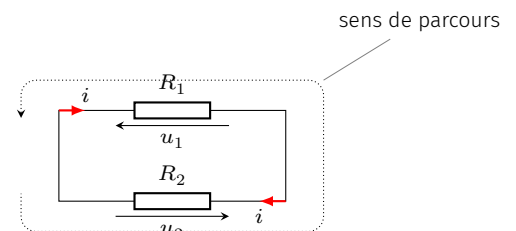


FIG. 1.5 : Réseau constitué de deux résistances

Notez qu'en général le conducteur voit sa température varier, ce qui fait augmenter son enthalpie ($\Delta H = \int m c_p dT$). Dans ce cas, une partie de l'énergie électrique sert à augmenter l'énergie interne du conducteur et à le dilater.

Résistances en série – On dit que des résistances sont en série lorsqu'elles sont traversées par le même courant électrique. Appelons i

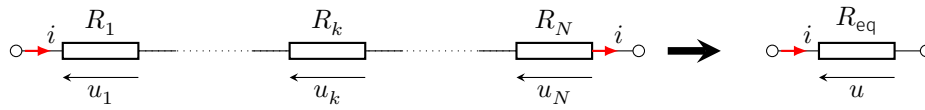


FIG. 1.6 : Conducteurs ohmiques en série.

l'intensité du courant. On a

$$u = R_{\text{eq}} i = \sum_{k=1}^N u_k = i \sum_{k=1}^N R_k$$

Par conséquent, on obtient

$$R_{\text{eq}} = \sum_k R_k \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

Résistances en parallèle – On dit que des résistances sont associées en parallèle lorsqu'elles sont soumises à la même tension. Appelons

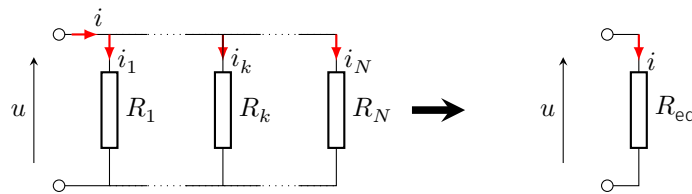


FIG. 1.7 : Conducteurs ohmiques en parallèle.

u la tension commune. On a

$$i = \frac{u}{R_{\text{eq}}} = \sum_{k=1}^N i_k = u \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

On trouve donc

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad \heartsuit \quad (1.7)$$

On pourra retenir par exemple que :

- ▶ deux résistances en parallèle équivalent à un conducteur de résistance $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$;
- ▶ N résistances identiques R en parallèle équivalent à un conducteur de résistance R/N .

Ponts diviseurs

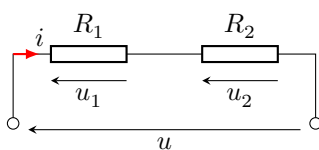


FIG. 1.8 : Pont diviseur de tension

Considérons deux résistances R_1 et R_2 en série soumises à une tension globale u .

En vertu de la loi des mailles, on a $u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i$. La tension aux bornes de chaque résistance $u_k = R_k i$ est alors une fraction de

la tension u

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2} u \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (1.8)$$

On parle alors de montage *diviseur de tension*.

On considère maintenant deux résistances R_1 et R_2 en parallèle alimentées par un courant global i . Définissons les conductances $G_k = 1/R_k$, exprimées en siemens (symbole : S). Le courant traversant chacune des résistances a pour intensité $i_k = G_k u$ et $u = (G_1 + G_2)i$. En conséquence, on obtient

$$i_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2} i \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (1.9)$$

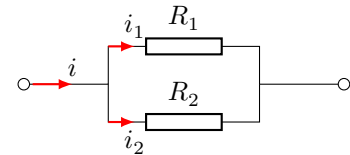
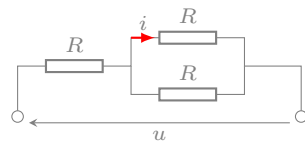


FIG. 1.9 : Pont diviseur de courant

Le courant se répartit au prorata des conductances et l'on parle de montage *diviseur de courant*.

Exercice – On considère le montage ci-dessous. Calculer l'intensité du courant i .



Rép. $i = u/(3R)$.

1.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif

Contrairement aux dipôles passifs, les dipôles actifs produisent une tension en circuit ouvert. On distingue les sources (piles, alimentation stabilisée, batteries en utilisation,...) et les récepteurs (électrolyseurs, batteries en charge, moteurs électriques).

Source de tension

Une source de tension permet aux charges de « remonter » le potentiel grâce à l'existence d'un champ électromoteur au sein de la source. Ce champ électromoteur produit une tension, dite force électromotrice (f.é.m) que nous noterons e . La caractéristique d'une source de

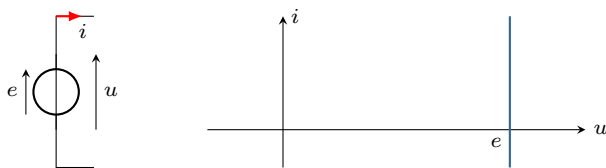


FIG. 1.10 : Source idéale de tension : schéma et caractéristique

tension idéale s'écrit en *convention générateur* :

$$u = e \quad \forall i$$

où e est la **force électromotrice** (f.é.m) de la source de tension.

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de tension, on modélise la source par une source idéale en série avec une résistance r dite *résistance interne*. La caractéristique s'écrit alors :

$$u = e - ri \quad \heartsuit \quad (1.10)$$

Il ressort de cette caractéristique que la source de tension acquiert

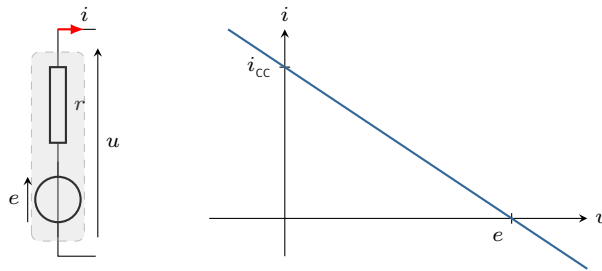


FIG. 1.11 : Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire.

un comportement quasi-idéal à la condition que $ri \ll e$: le courant débité par la source doit rester faible. C'est ce que l'on obtient lorsque que l'on branche un voltmètre aux bornes de la source : la résistance interne du voltmètre étant très grande, le courant débité est quasiment nul de sorte que le voltmètre indique la f.é.m de la source. Par ailleurs, lorsque l'on court-circuite la source en reliant ses deux bornes ($u = 0$), on trouve un courant de court-circuit

$$i_{cc} = e/r$$

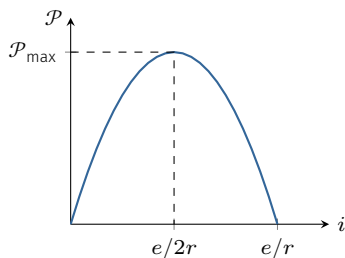


FIG. 1.12 : Puissance produite en fonction du courant débité.

Du point de vue énergétique, la puissance délivrée par la source de tension vaut $\mathcal{P} = ui = ei - ri^2$. Ainsi, la puissance atteint une valeur maximale lorsque $i = e/2r$. Une source réelle de tension délivre donc une puissance maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{e^2}{4r}$$

Source de courant

Le rôle d'une source de courant est d'imposer un courant constant indépendamment de la tension qui règne à ses bornes. Une source

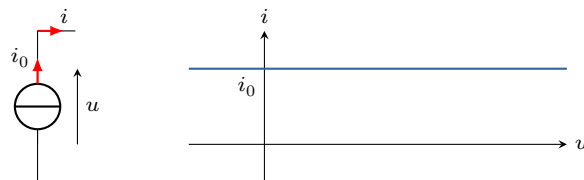


FIG. 1.13 : Source de courant idéale : schéma et caractéristique.

de courant idéale aura la caractéristique suivante :

$$i = i_0 \quad \forall u$$

où i_0 désigne le **courant électromoteur** (c.é.m).

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de courant réelle, on la modélise par une source idéale en parallèle avec une conductance interne g . La caractéristique s'écrit alors :

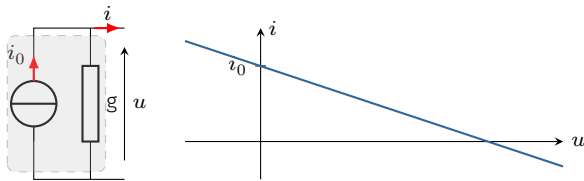


FIG. 1.14 : Source réelle de courant : schéma et caractéristique.

$$i = i_0 - gu \quad \text{avec} \quad g = \frac{1}{r}$$

où g est la conductance interne (r la résistance interne). On notera qu'une source de courant se rapproche d'une source de courant idéale quand sa conductance interne $g \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$).

La puissance fournie par une source de courant réelle vaut $\mathcal{P} = ui = ui_0 - gu^2$. Suivant le dipôle que charge la source de courant, la tension et donc la puissance délivrée varie. La courbe ci-contre montre que lorsque $u = i_0/2g$ la puissance atteint une valeur maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{i_0^2}{4g}$$

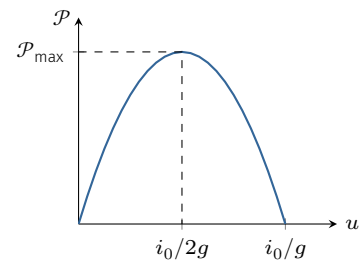


FIG. 1.15 : Puissance fournie par une source de courant en fonction de la tension à ses bornes.

Représentations de Thévenin et Norton

Considérons une source de tension réelle dont la modélisation linéaire est donnée par $u = e - ri$. Cette caractéristique peut se réécrire $i = e/r - gu$ avec $g = 1/r$. En d'autres termes, une source de tension réelle peut s'interpréter comme une source de courant de c.é.m $i_0 = e/r$ et de conductance $g = 1/r$. Ainsi, toute source linéaire présente deux représentations possibles :

- ▶ la modélisation de Thévenin correspondant à une source de tension idéale en série avec une résistance ;
- ▶ la modélisation de Norton correspondant à une source de courant idéale en parallèle avec une conductance.

On passe d'une représentation à une autre en retenant l'équivalence Thévenin-Norton suivante :

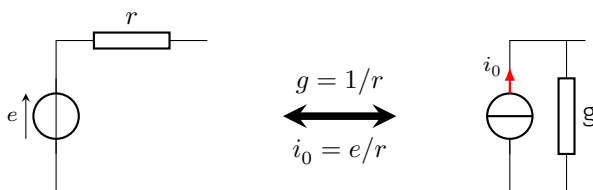


FIG. 1.16 : Équivalence Thévenin-Norton.

Récepteur actif

Étudions le cas d'une batterie chimique. On distingue deux comportements : la décharge ou la charge. Lorsque la batterie se décharge, elle

est alors source d'énergie et est modélisée par une source de tension de f.é.m e et de résistance interne r . On a en convention générateur

$$u = e - ri \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = ei - ri^2 > 0$$

En fonctionnement générateur, la puissance fournie est positive et le sens du courant est dictée par la polarité de la source. En revanche,



FIG. 1.17 : Batterie en charge.

lorsque la batterie est en charge, le courant est dans l'autre sens. Dans ce cas, le dipôle reçoit de la puissance : on dit qu'il s'agit d'un récepteur actif et e est désigné par le terme **force contre-électromotrice** (f.c.é.m). En convention récepteur, on écrira donc

$$u = e + ri$$

et la puissance fournie à la batterie vaut

$$\mathcal{P} = ei + ri^2$$

Une partie de cette puissance (ri^2) est dissipée par effet joule et l'autre partie (ei) est convertie en énergie chimique. On peut d'ailleurs définir un rendement de conversion

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{convertie}}}{\mathcal{P}_{\text{fournie}}} = \frac{e}{e + ri}$$

Finalement, une batterie est une source de tension qui peut fonctionner, soit en générateur, soit en récepteur, la polarité étant fixé par la borne + de la batterie. On parle alors de *récepteur réversible*. Les accumulateurs, les électrolyseurs ont ce comportement.

Il existe cependant des dipôles actifs dont le comportement est toujours récepteur quel que soit le sens du courant. La polarité de la f.c.é.m est toujours orientée à contre sens du courant. On parle de *récepteur non réversibles* (ou non polarisés). Le moteur à courant continu en est un exemple.

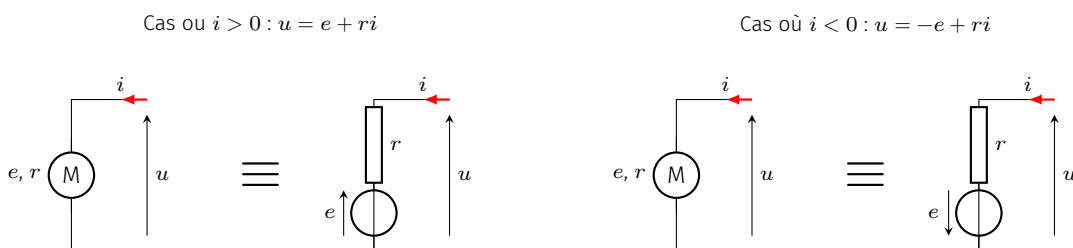


FIG. 1.18 : Moteur à courant continu

Loi de Pouillet

Imaginons une maille constituée de dipôles actifs (en représentation de Thévenin) et de résistances. Appelons R la somme de toutes les résistances (résistances internes incluses). Imposons un sens positif du courant et notons i l'intensité algébrique du courant qui circule dans la maille. Notons e_k les f.é.m (orientées dans le sens positif) et e'_k les f.c.é.m (orientés dans le sens contraire). La loi des mailles permet d'écrire

$$\sum_k e_k - \sum e'_k - Ri = 0$$

Ce qui donne la loi connue sous le nom de loi de Pouillet :

$$i = \frac{\sum_k e_k - \sum_{k'} e'_k}{R} \quad \heartsuit \quad (1.11)$$

Exercice – Une source de tension continue, de f.é.m $e = 15$ V, charge une batterie de f.c.é.m $e' = 12$ V. Déterminer le courant de charge i à l'aide de la loi de Pouillet.

Rép. $i = 50$ mA

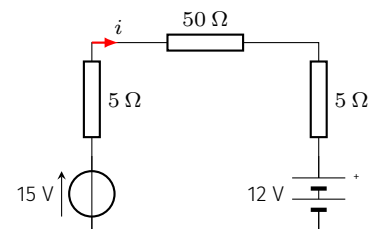


FIG. 1.19 : Charge d'une batterie.

1.4 Méthodes de résolution

Utilisation de la loi des mailles

Dans un réseau constitué de b branches et n nœuds, il y a $N = b - n + 1$ courants indépendants. En effet, les b courants circulant dans les b branches vérifient $n - 1$ relations (lois des nœuds). Il nous faut donc N relations pour déterminer ces inconnues. Ces relations sont obtenues en appliquant la loi des mailles dans N mailles indépendantes associées aux caractéristiques des dipôles. On obtient alors un système d'équations à résoudre.

Méthodologie

1. Parcourir toutes les branches du réseau en définissant les courants algébriques et en appliquant le plus possible la loi des nœuds à chaque fois que l'on rencontre un nœud.
2. Compter le nombre N de courants inconnus puis choisir N mailles avec un sens de parcours.
3. Écrire N lois des mailles en utilisant les caractéristiques des dipôles. Notez que si une branche contient une source de courant, l'intensité électrique dans cette branche est alors déterminée, mais la tension aux bornes de la source est alors une inconnue.
4. Résoudre le système d'équations.

Cette méthode présente l'avantage de déterminer toutes les grandeurs électriques et s'applique à tous les réseaux électriques. Si le

circuit contient uniquement des dipôles linéaires, le système d'équations obtenu est alors linéaire, ce qui facilite sa résolution.

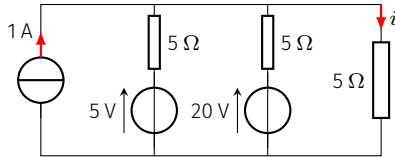
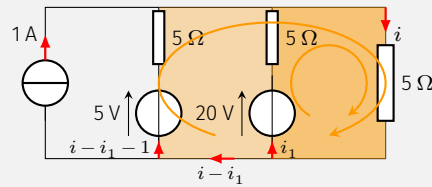


FIG. 1.20 : Circuit étudié.

Exemple

À l'aide des lois de Kirchhoff, déterminons l'intensité du courant i dans le circuit ci-contre.

Commençons par définir tous les courants. Appelons i_1 le courant qui traverse le dipôle (20 V, $5\ \Omega$). En parcourant tout le réseau, on s'aperçoit qu'il n'y a que deux courants inconnues : i et i_1 (notez qu'il y a une source de courant qui impose la valeur de l'intensité du courant dans une branche). Il suffit donc de deux relations pour les déterminer. On choisira les mailles représentées en couleur sur la figure.



La loi des mailles donne alors

$$\begin{cases} 20 - 5i_1 - 5i & = 0 \\ 5 - 5(i - i_1 - 1) - 5i & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5i_1 + 5i & = 20 \\ -5i_1 + 10i & = 10 \end{cases}$$

En sommant les deux relations, on trouve $15i = 30$, soit $i = 2\text{ A}$.

Équivalence Thévenin-Norton

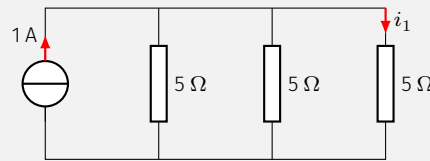
L'inconvénient majeur de la méthode précédente est qu'elle nécessite de résoudre un système de N équations, même si l'on ne cherche qu'une seule grandeur électrique; le risque d'erreur de calcul peut devenir important.

Pour remédier à ce défaut, on peut utiliser de façon judicieuse l'équivalence électrique entre une source de tension réelle et une source de courant réelle. En associant les résistances quand c'est possible et en répétant plusieurs fois la transformation Thévenin↔Norton, on peut simplifier une partie du réseau électrique étudié, et donc diminuer le nombre de mailles. Quand le but est de calculer les grandeurs électriques relatives à une branche particulière, cette méthode est à envisager.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent en remplaçant les sources de tension par leur représentation de Norton.

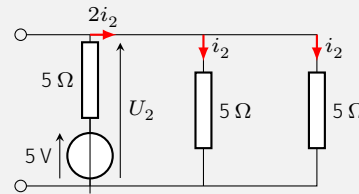
diviseur de courant.



La formule du diviseur donne immédiatement l'intensité que l'on recherche :

$$i_1 = \frac{1/5}{1/5 + 1/5 + 1/5} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ A}$$

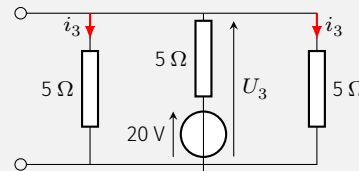
Éteignons la source de courant et allumons la première source de tension.



Les deux résistances en parallèle étant identiques, elles sont traversées par le même courant (noté i_2). La source débite donc un courant d'intensité $2i_2$ et la loi des mailles donne

$$U_2 = 5 - 5(2i_2) = 5i_2 \quad \text{soit} \quad i_2 = \frac{1}{3} \text{ A}$$

Enfin, allumons seulement la dernière source.



Pour les mêmes raisons que précédemment, la source débite un courant double de celui qui traverse les résistances en parallèle. La loi des mailles donne

$$U_3 = 20 - 5(2i_3) = 5i_3 \quad \text{soit} \quad i_3 = \frac{4}{3} \text{ A}$$

Finalement, le courant produit lorsque toutes les sources sont allumées vaut

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 \text{ A}$$

Théorème de Millman

Considérons un nœud N auquel sont reliés n conducteurs ohmiques de résistances R_k ($k = 1 \dots n$). On choisit un potentiel de référence ($V = 0$) et l'on note V_k le potentiel électrique de l'autre borne de R_k .

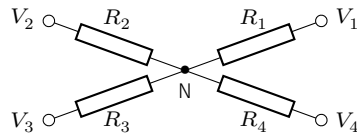


FIG. 1.22 : Le théorème de Millman permet d'exprimer le potentiel du nœud N en fonction des potentiels V_k .

Théorème de Millman

Le théorème de Millman exprime le potentiel V_N en fonction des V_k et des conductances $G_k = 1/R_k$ de chaque branche :

$$V_N = \frac{\sum_{k=1}^n G_k V_k}{\sum_{k=1}^n G_k} \tag{1.12}$$

Si une branche ($k = 1$ par exemple) est traversée par un courant d'intensité i_1 connue, on écrira

$$V_N = \frac{i_1 + \sum_{k=2}^n G_k V_k}{\sum_{k=2}^n G_k} \tag{1.13}$$

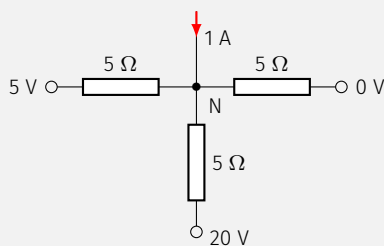
Démonstration : le théorème de Millman est en réalité une réécriture de la loi des nœuds en termes de potentiels. D'après la loi d'ohm, le courant de la branche k entrant en N a pour intensité

$$i_k = \frac{V_k - V_N}{R_k}$$

La loi des nœuds $\sum_k i_k = 0$ aboutit au théorème de Millman.

Exemple

Appliquons le théorème de Millman afin de déterminer l'intensité i de la figure ci-contre. Pour cela, fixons la masse (potentiel nul) au niveau de la borne - des sources de tension, et plaçons N au nœud commun aux trois résistances.



Le théorème de Millman donne immédiatement

$$V_N = \frac{1/5 \times 0 + 1/5 \times 20 + 1/5 \times 5 + 1}{1/5 + 1/5 + 1/5} = 10V$$

et la loi d'Ohm, $i = \frac{V_N}{5} = 2A$.

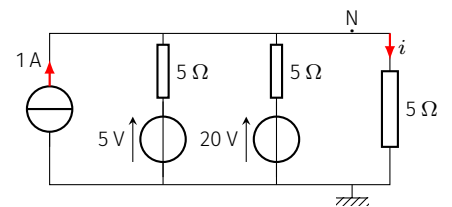


FIG. 1.23 : Circuit étudié.

Ce théorème, que l'on doit à Jacob Millman, est assez utile dans les circuits présentant des amplificateurs linéaires intégrés.

Jusqu'à présent, pour expliciter les lois de l'électricité en régime continu, nous avons introduit des dipôles linéaires dont la caractéristique est de type affine. Il existe d'autres dipôles linéaires dont la caractéristique est de type intégral-différentielle; le condensateur et la bobine inductive en sont les représentants.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/condensateurs-et-bobines.php>

- 2.1 Condensateur électrique . . . 17
 - Le condensateur idéal . . . 17
 - Énergie emmagasinée . . . 18
 - Association de condensateurs 19
 - Condensateur réel 20
- 2.2 Bobine d'induction 20
 - Phénomène d'induction . . . 20
 - Auto-induction 22
 - Énergie magnétique 22
 - Bobine réelle 23

2.1 Condensateur électrique

Le condensateur idéal

On a vu en électromagnétisme[1] qu'un condensateur est l'association de deux conducteurs en influence totale, appelés armatures. Soumis à une tension électrique constante U , le condensateur accumule au niveau de ses armatures des charges électriques de signe opposé (Q et $-Q$) telles que $Q = CU$. On admettra cette relation également vérifiée en régime variable.

[1] : ROUSSEL (2016), *Conducteurs électriques*

Capacité d'un condensateur

Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, un condensateur idéal répond à la caractéristique

$$q(t) = Cu(t) \tag{2.1}$$

où C est la **capacité** du condensateur. Celle-ci s'exprime en farad (F); elle dépend de la géométrie du condensateur et de la nature de l'isolant placé entre les armatures.

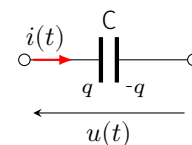


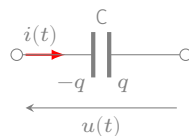
FIG. 2.1 : Schéma électrique du condensateur idéal.

On a donc en convention récepteur

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad \text{[Convention récepteur]} \quad \heartsuit \tag{2.2}$$

Le comportement du condensateur idéal obéit au principe de superposition. En effet, si i_1 est la réponse à la tension u_1 et i_2 celle à la tension u_2 , alors $i_1 + i_2$ est la réponse à la tension $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$. En ce sens, le condensateur est un *dipôle linéaire*.

Exercice – Soit un condensateur avec les conventions électriques suivantes :



Donner les relations entre u et q , i et q ainsi que u et i .

En régime continu, toutes les grandeurs étant stationnaires, la loi (2.2) devient $i = 0$. Par conséquent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime continu.

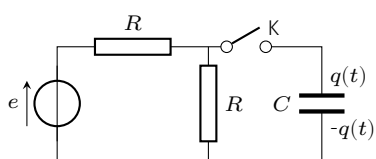
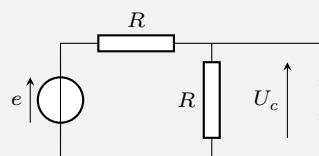


FIG. 2.2 : Montage étudié.

Exemple

Soit le montage ci-contre. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur K pour permettre à la source de tension de charger le condensateur. Que vaut la charge capacitive une fois le régime continu établi ?

Pour répondre à la question il suffit de remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert.



On obtient alors un montage diviseur de tension. La tension aux bornes du condensateur vaut

$$U_c = e \times \frac{R}{R + R} = \frac{e}{2}$$

ce qui donne une charge capacitive $q = Ce/2$.

Énergie emmagasinée dans un condensateur

On rappelle qu'un condensateur idéal stocke une énergie électrique

$$W_E = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{q^2}{2C} \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

Le condensateur chargé agit comme un réservoir d'énergie qu'il peut fournir au reste du circuit. La puissance que reçoit un condensateur idéal s'écrit

$$\mathcal{P} = u i = C u \frac{du}{dt} = \frac{dW_E}{dt}$$

Lorsque l'énergie stockée décroît, $\mathcal{P} < 0$: le condensateur se décharge en fournissant de l'énergie au reste du circuit, agissant ainsi comme un générateur.

Exercice – Calculer l'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité $C = 1 \mu\text{F}$ chargé sous la tension constante $U = 30 \text{ V}$.

Rép. $W_E = 0,45 \text{ mJ}$.

Le fait que le condensateur stocke une énergie sous forme électromagnétique a une conséquence importante en électrocinétique. Vu que l'énergie d'un système ne peut pas varier de façon discontinue, la charge et la tension d'un condensateur doivent varier continûment.

À retenir

La charge électrique d'une armature de condensateur évolue de façon continue au cours du temps. Cette propriété est aussi vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

Association de condensateurs

Association en parallèle – Soient deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 montés en parallèle. On suppose que ces condensateurs

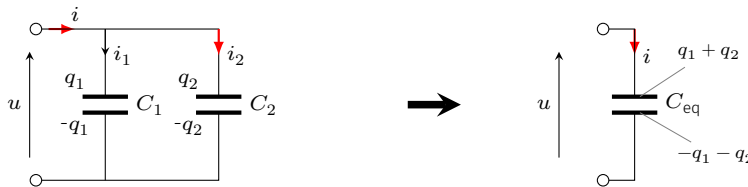


FIG. 2.3 : Deux condensateurs associés en parallèle.

sont suffisamment éloignés pour pouvoir négliger toute influence mutuelle (ce qui est fréquemment réalisé). Exprimons l'énergie emmagasinée :

$$W_E = \frac{1}{2}C_1u^2 + \frac{1}{2}C_2u^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)u^2$$

Par conséquent, l'ensemble est équivalent à un condensateur de capacité $C_{eq} = C_1 + C_2$ soumis à la tension commune u . Cette propriété se généralise aisément : N condensateurs montés en parallèle et sans influence mutuelle équivalent à un condensateur de capacité :

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

Association en série – Considérons deux condensateurs de capacité C_1 et C_2 montés en série. Appelons i l'intensité du courant qui les

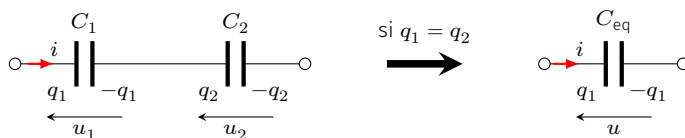


FIG. 2.4 : Deux condensateurs associés en série.

traverse. La conservation de la charge implique que

$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \implies q_2 - q_1 = C^{te}$$

la quantité de charge $q_2 - q_1$ représente la charge répartie sur la liaison conductrice entre les deux condensateurs. Supposons la liaison

initialement neutre : $q_1 = q_2 = q$. Dans ce cas, l'ensemble est équivalent à un condensateur portant une charge q et une capacité C_{eq} . En effet, l'énergie de l'association s'écrit

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{\text{eq}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

On peut étendre cette démonstration à un nombre quelconque de condensateurs. Ainsi, N condensateurs associés en série, sans influence mutuelle et tels que les liaisons inter-armatures soient neutres, se comportent comme un condensateur de capacité

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

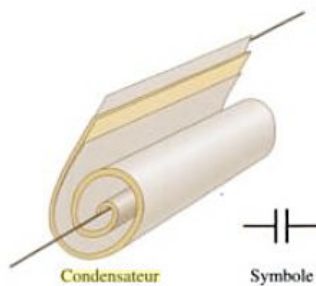


FIG. 2.5 : Fabrication d'un condensateur plan réel.

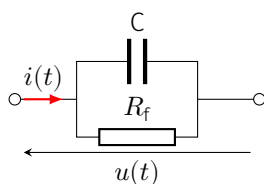


FIG. 2.6 : Modélisation d'un condensateur réel.

Condensateur réel

Pour réaliser un condensateur peu encombrant, on enroule généralement deux rubans métalliques (aluminium ou étain) jouant le rôle des armatures, que l'on sépare par deux rubans isolants (papier paraffiné, plastique). La présence de cet isolant, dit diélectrique, a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur formé suite au phénomène de polarisation électrique. En revanche, le comportement d'un tel condensateur s'écarte un peu de l'idéalité pour deux raisons essentielles.

1. La tension est en général limitée. En effet, il existe un champ électrique qu'il ne faut pas dépasser au risque de détruire le diélectrique placée entre les armatures du condensateur (existence d'un champ disruptif).
2. Il existe un courant de fuite à travers le diélectrique du fait de la conductivité finie de ce dernier. Par exemple, lorsqu'un condensateur chargé est abandonné en circuit ouvert, on constate que sa charge diminue au cours du temps.

Pour modéliser cette fuite, on introduit la notion de **résistance de fuite**. Aussi on représente un condensateur réel par l'association en parallèle d'un condensateur parfait de capacité C avec une résistance de fuite R_f . Son ordre de grandeur varie entre le $M\Omega$ et la centaine de $M\Omega$.

2.2 Bobine d'induction

Introduction à l'induction magnétique

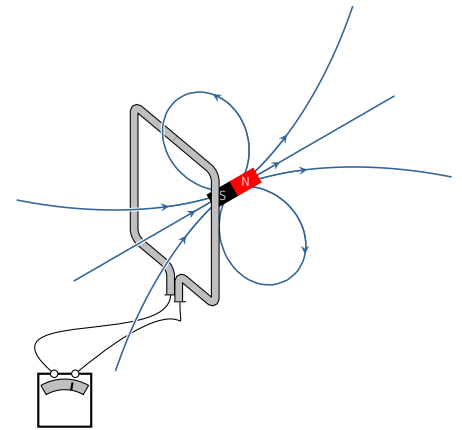
Le phénomène d'induction électromagnétique, découvert par Faraday en 1831, a une grande portée industrielle puisqu'il permet de convertir une énergie mécanique en une énergie électrique et vice-versa. Décrivons le principe à l'aide de l'expérience suivante.

Expérience

Mettons en mouvement un aimant au voisinage d'un cadre conducteur reliée à un galvanomètre (détecteur de courant). On observe l'existence d'un courant induit par le mouvement de l'aimant. Plus précisément, on constate que l'intensité du courant dépend de la façon dont on déplace l'aimant.

- ▶ Si l'on approche l'aimant de façon à ce que le champ magnétique augmente au voisinage de la spire, le courant électrique qui apparaît circule dans un sens tel qu'il produit un champ opposé au champ magnétique imposé par l'aimant.
- ▶ à l'inverse, quand l'aimant s'éloigne de façon à ce que le champ magnétique diminue, le courant électrique induit circule de façon à renforcer le champ magnétique imposé.
- ▶ le sens du courant dépend du sens de l'aimant et du mouvement mais dans tous les cas, le courant induit créé un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ magnétique imposé par le mouvement de l'aimant.
- ▶ Ce phénomène est amplifié par la vitesse du mouvement et par la puissance de l'aimant.

Répétons la même expérience en remplaçant l'ampèremètre par un volt-mètre. Dans ce cas, on note que le mouvement de l'aimant induit également une tension d'autant plus importante que le mouvement de l'aimant est rapide. La polarité de la tension induite dépend du sens de l'orientation de l'aimant.



Galvanomètre

FIG. 2.7 : Induction

La première expérience montre que la spire se comporte comme un aimant dont l'action sur l'aimant consiste à le freiner dans son mouvement. On en tire la loi de modération suivante :

Loi de Lenz

Dans un circuit fermé, la variation de flux magnétique produit un courant induit dont les effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

Dans la deuxième expérience, le circuit ouvert n'est plus le siège d'un courant mais voit apparaître à ses bornes, une tension électrique. Le circuit se comporte alors comme une source de tension de f.é.m e , dite **force électromotrice induite**. Quantitativement, on montre que

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad \heartsuit \quad (2.6)$$

Cette loi, dite **loi de Faraday**, fait intervenir le flux magnétique ϕ_B à travers le circuit. Rappelons que

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad [\text{Wb}]$$

Sa valeur, exprimée en weber (Wb), dépend de la forme du circuit et du champ magnétique mais en aucune manière il ne dépend du choix de la surface S s'appuyant sur le circuit. Comme d'habitude, \vec{n} est le vecteur unitaire localement normal à la surface S et dont le sens est

lié au sens positif du circuit *via* la règle du tire-bouchon.

Auto-induction

On parle d'auto-induction quand la source de champ magnétique à l'origine du phénomène d'induction dans un circuit est produit par le circuit même.

Considérons une **bobine**, c'est-à-dire un enroulement de fil électrique. Lorsque cette bobine est traversée par un courant électrique, celui-ci produit un champ magnétique ainsi qu'un flux magnétique ϕ_B , dit *flux propre*, à travers la bobine. Étant donné que le champ magnétique créé est proportionnel à l'intensité i du courant (d'après la loi de Biot et Savart), on peut écrire

$$\phi_B = Li$$

où L désigne le **coefficient d'auto-inductance**¹. La grandeur L s'exprime en henry (symbole : H) en hommage à Joseph Henry. Lorsque le courant varie au cours du temps, la bobine se comporte comme une source de f.é.m $e = -L \frac{di}{dt}$ en convention générateur. Ainsi, la caractéristique d'une bobine idéale s'écrit, en convention récepteur :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad [\text{convention récepteur}] \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

Pour les mêmes raisons que le condensateur, la bobine inductive respecte le principe de superposition, et de ce fait est un *dipôle linéaire*.

Notez qu'en régime continu, le courant étant stationnaire, la caractéristique (2.7) aboutit à $u_L = 0$. Autrement-dit, la bobine peut être remplacée par un fil conducteur parfait une fois le régime continu atteint.

Rigoureusement, tout montage électrique présente une auto-inductance, ne serait-ce que parce qu'il faut former une boucle pour refermer le circuit.

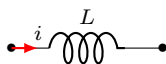


FIG. 2.8 : Représentation d'une bobine idéale.

1 : On dit aussi inductance propre



FIG. 2.9 : Joseph Henry (1797 - 1878).

Énergie emmagasinée dans une bobine

La puissance électrique que reçoit une bobine parcourue par un courant électrique s'écrit

$$\mathcal{P} = ui = iL \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Par définition, l'énergie stockée par une bobine idéale W_B est l'énergie qu'elle est susceptible de libérer lorsque l'on coupe son alimentation ($i = 0$).

$$W_B = - \int \mathcal{P} dt = - \int_{i'=i}^0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li'^2 \right) dt = \frac{1}{2} Li^2$$

Cette énergie ne dépend pas de la façon dont on coupe l'alimentation. Ainsi, on dira qu'une bobine idéale alimentée par un courant électrique emmagasine une énergie sous forme magnétique qui vaut

$$W_B = \frac{1}{2}Li^2 \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

Comme pour le condensateur, l'énergie qu'emmagasine la bobine ne peut pas évoluer par saut. Aussi l'intensité du courant doit varier continûment.

À retenir

L'intensité du courant qui traverse une bobine évolue de façon continue au cours du temps.

Bobine réelle

Dans la pratique, le fil formant la bobine est résistive. C'est pourquoi, on modélise une bobine réelle en ajoutant en série une résistance r , appelée *résistance interne* de la bobine. Généralement, cette représentation convient à basse fréquence.

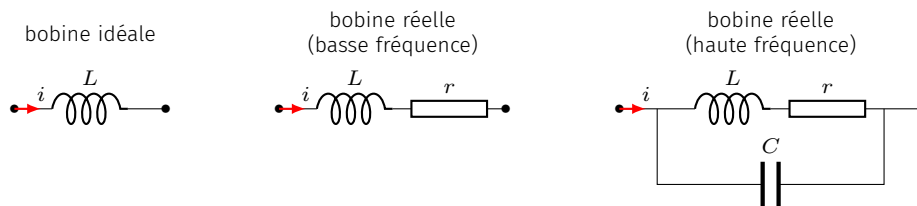


FIG. 2.10 : Modélisations d'une bobine.

À moyenne et haute fréquence, deux phénomènes parasites apparaissent :

1. en régime variable, le courant ne se distribue plus de façon uniforme dans le conducteur : c'est l'*effet de peau*. Ce phénomène produit une augmentation de la résistance r avec la fréquence².
2. un effet capacitif se produit entre les différentes spires de la bobine. On modélise ce phénomène en ajoutant un condensateur en parallèle (Fig. 2.10).

2 : On peut montrer que r augmente avec le carré de la fréquence.

Jusqu'ici nous avons étudié des circuits électriques en régime continu, pour lesquels toutes les grandeurs électriques restent stationnaires. Mais que se passe-t-il lorsque l'on passe d'un régime continu à un autre? Ce chapitre répond à la question.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/regimes-transitoires.php>

3.1 Généralités

Régime transitoire

Imaginons par exemple un circuit constitué d'une source de tension continue et d'une résistance. Ajoutons un interrupteur. Ce dernier étant initialement ouvert, on décide de le fermer à l'instant $t = t_0$. Que prévoient les lois de Kirchhoff, et qu'observe-t-on en réalité?

Lorsque l'interrupteur est ouvert, le courant ne peut pas circuler :

$$i = 0 \quad \forall t < t_0$$

La fermeture de l'interrupteur autorise le courant à circuler, et les lois de Kirchhoff imposent

$$e - Ri = 0 \quad \text{soit} \quad i = \frac{e}{R} \quad \forall t > t_0$$

Le courant passe donc brutalement de la valeur nulle à la valeur e/R . Or, une observation attentive montre que la transition entre les deux régimes continus n'est pas instantanée, et suit une certaine évolution. Ce régime est appelé **régime transitoire**. La durée caractéristique de ce régime est appelé **temps de relaxation** et sera noté τ . Dans l'exemple discuté ici, l'origine du régime transitoire est lié au fait que le circuit présente une auto-inductance que l'on a négligé dans la mise en équation. Nous verrons plus loin que lorsque l'on tient compte de cette self-inductance, les lois de Kirchhoff rendent bien compte de l'existence de ce régime transitoire.

En résumé

Un régime transitoire est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint son régime permanent. Il se caractérise par une durée caractéristique τ , appelée temps de relaxation¹.

- 3.1 Généralités 25
 - Régime transitoire 25
 - Aspects mathématiques 26
- 3.2 Décharge d'un condensateur 27
 - Montage étudié 27
 - Régime transitoire 27
 - Bilan d'énergie 29
- 3.3 Circuit RL 29
 - Montage étudié 29
 - Régime transitoire 30
 - Bilan énergétique 30
- 3.4 Oscillateur RLC 31
 - Montage RLC série 31
 - Mise en équation 31
 - Régimes transitoires 32
 - Aspects énergétiques 33

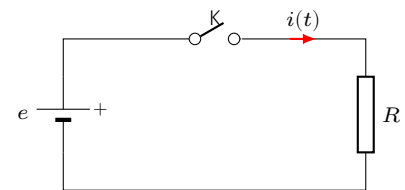


FIG. 3.1 : Montage étudié.

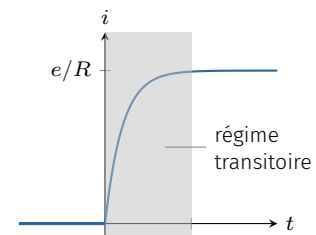


FIG. 3.2 : Régime transitoire observé à l'ouverture de l'interrupteur.

¹ : On dit aussi constante de temps.

En électricité, la durée du régime transitoire est en général très courte, de sorte qu'à peine a-t-on allumé les appareils que le régime permanent est déjà établi. On doit alors utiliser un appareil de détection ou de visualisation (un oscilloscope par exemple) présentant un temps de réponse plus court que la durée du régime transitoire à observer.

Aspects mathématiques

2 : Par exemple constitué de conducteurs ohmiques, condensateurs et bobines.

3 : Une tension, une intensité, une charge électrique...

Considérons un dipôle électrique passif et linéaire² alimenté par une source de tension ou de courant variable.

Imaginons que l'on suive l'évolution d'une grandeur électrique³ que nous décidons de noter $y(t)$. Dans le cadre de l'ARQS, les lois de Kirchhoff permettent d'obtenir une équation différentielle de la forme

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = f(t) \quad (3.1)$$

où $f(t)$ et les coefficients a_k sont connues. Cette équation présente deux termes.

- ▶ Le terme de gauche est caractéristique des éléments qui composent le dipôle. Si $a_n \neq 0$, on dit que **le dipôle est d'ordre n** .
- ▶ Le terme de droite est lié à la présence du générateur. On parle de **terme d'excitation**.

On établit en mathématique que la solution de l'équation différentielle est la somme

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

4 : Que l'on trouve généralement en recherchant une solution de la même forme que $f(t)$.

- ▶ $y_p(t)$ est une solution particulière de l'équation complète⁴ qui représente le **régime forcé**.
- ▶ $y_0(t)$ est la solution générale de l'équation homogène (3.2)

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = 0 \quad (3.2)$$

$y_0(t)$ représente le **régime libre**, c'est-à-dire la réponse du circuit en l'absence d'excitation

Le régime libre se met sous la forme $y_0(t) = A e^{rt}$ où r est un nombre réel ou complexe solution de l'équation caractéristique

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n = 0$$

5 : Si l'équation caractéristique admet une racine multiple r_0 d'ordre p , la solution contient un terme de la forme $P(t) e^{r_0 t}$ où $P(t)$ est un polynôme d'ordre p .

Si les n racines sont distinctes⁵, le régime libre s'écrit

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{r_k t}$$

On détermine les n constantes d'intégration A_k en imposant les conditions initiales à la solution complète $y(t)$. Celles-ci doivent respecter les règles de continuité que l'on rappelle :

Règles de continuité

- ▶ Dans une branche contenant un condensateur, la tension capacitive est une fonction continue du temps;
- ▶ Dans une branche contenant une bobine d'induction, l'intensité électrique est une fonction continue du temps.

Du fait des effets dissipatifs toujours présents dans un dipôle passif réel, le régime libre s'amortit. On définit alors le temps de réponse T_r du dipôle comme le temps⁶ à partir duquel le régime forcé est établi :

$$|y_0(t)| \ll |y_p(t)| \quad \forall t > T_r$$

Par la suite, on illustre avec trois exemples; deux dipôles du premier ordre et un du second ordre.

6 : Sa valeur dépend du critère que l'on choisit pour décider que le régime libre devient négligeable.

3.2 Décharge d'un condensateur

Montage étudié

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de f.é.m e_0 , d'un condensateur de capacité C , d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un inverseur K. On commence par charger le condensateur en basculant K de manière à mettre en contact la source de tension et le condensateur. Le condensateur se trouve alors chargé et stocke ainsi la quantité de charge

$$q_0 = C e_0$$

À $t = 0$, on bascule K. Le condensateur se décharge alors dans la résistance. Avant d'étudier le régime transitoire, analysons les conditions aux limites de ce problème.

- ▶ Juste après l'inversion de K, il y a continuité de la tension capacitive. On en déduit

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = e_0 \quad \text{et} \quad i(0^+) = \frac{u_C(0^+)}{R} = \frac{e_0}{R}$$

- ▶ Une fois le régime forcé (ici continu) établi, toutes les grandeurs sont stationnaires. On a donc

$$q(t) = C^{te} \Rightarrow i(t) = 0 \quad \text{et} \quad u_C(t) = 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

Régime transitoire

Cherchons l'évolution de la tension capacitive $u_C(t)$ et du courant de décharge $i(t)$.

Lorsque l'on a basculé l'interrupteur, le circuit obéit à la loi des mailles :

$$u_C(t) - Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_C}{dt}$$

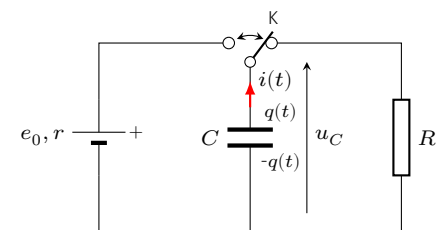


FIG. 3.3 : Montage RC.

La tension u_C vérifie donc l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

On voit immédiatement, par analyse dimensionnelle de l'équation différentielle, que τ représente une durée. Les solutions sont de la forme $u_C(t) = Ae^{-t/\tau}$. On détermine A grâce à la condition initiale $u_C(0) = e_0$, ce qui donne $A = e_0$. Finalement, la tension u_C évolue au cours du temps suivant la loi

$$u_C(t) = e_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad i(t) = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{e_0}{R} e^{-t/\tau}$$

La tension capacitive décroît exponentiellement jusqu'à s'annuler au bout d'un certain temps conformément à ce que l'on avait prévu dans l'analyse des conditions aux limites.

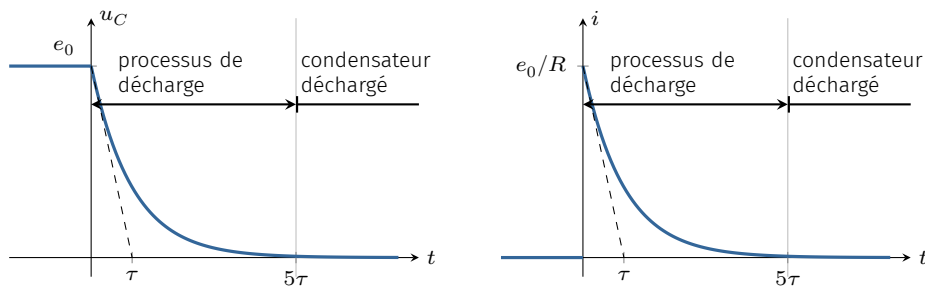


FIG. 3.4 : Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge.

Le temps caractéristique de cette décharge peut s'obtenir en prenant l'intersection de la tangente à l'origine avec la valeur finale $u_C = 0$. Il est facile de montrer que cette intersection a lieu lorsque $t = \tau$. La durée $\tau = RC$ donne ainsi un ordre de grandeur de la durée de la décharge.

Remarque : dans l'industrie on utilise souvent le temps de réponse à 5% qui vaut 3τ ($e^{-3} \simeq 5\%$).

À retenir

Le temps de relaxation d'un dipôle RC vaut $\tau = RC$. On retiendra que la charge (ou la décharge) d'un tel dipôle peut être considérée terminée après une durée $T_r = 5\tau$.

On voit donc qu'une grande résistance ralentit le temps de décharge du condensateur.

Le courant de décharge, quant à lui, n'est pas constant lors de ce processus. Maximum à $t = 0^+$ ($i_{\max} = e_0/R$), il décroît avec le même temps de relaxation que la tension. Notez que le courant n'est pas une fonction continue puisqu'il subit une discontinuité entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$. En effet, en basculant l'interrupteur K sur la branche contenant la résistance, on met brutalement la résistance sous tension (e_0) ce qui impose un courant initial e_0/R .

Bilan d'énergie

D'un point de vue énergétique, l'énergie stockée sous forme électrique $W_E = \frac{1}{2}Cu_C^2$ décroît avec un temps de relaxation $\tau_E = \tau/2$. En effet, la conservation de l'énergie se traduit par

$$\underbrace{\frac{d(1/2Cu_C^2)}{dt}}_{\text{puissance stockée}} + \underbrace{\frac{u_C^2}{R}}_{\text{puissance dissipée}} = 0$$

En remplaçant u_C^2 par $2W_E/C$ on trouve l'équation donnant l'évolution de l'énergie emmagasinée par le condensateur :

$$\frac{dW_E}{dt} + \frac{2}{\tau}W_E = 0 \Rightarrow W_E = W_{E,i} e^{-t/\tau_E}$$

L'énergie initialement emmagasinée par le condensateur est complètement dissipée par effet Joule après une durée de l'ordre de $5\tau_E$. On peut le vérifier par un calcul direct de l'énergie dissipée :

$$\int_0^\infty Ri^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{e_0^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2}Ce_0^2$$

L'énergie dissipée ne dépend pas de la résistance. C'est la durée de la dissipation qui en dépend.

3.3 Circuit RL

Montage étudié

Considérons un circuit constitué d'une source de f.é.m e_0 en série avec une résistance r_0 (si la source présente une résistance interne alors celle-ci est incluse dans r_0) qui, dans un premier temps alimente une bobine idéale. Au bout d'un certain temps, un courant permanent s'établit. Dès lors, la bobine se comportant comme un fil, on voit immédiatement que le courant s'établit à la valeur $i_0 = e_0/r_0$.

À l'instant $t = 0$, on bascule un interrupteur K de sorte que la bobine se trouve en contact avec une résistance de charge R . On oriente le courant dans le sens qui correspond au sens réel du courant i_0 .

La continuité du courant qui traverse la bobine impose

$$i(0^+) = \frac{e_0}{r_0} \quad \text{d'où} \quad u_L(0^+) = -Ri(0^+) = -\frac{R}{r_0}e_0$$

Lorsque le régime permanent est établi, toutes les grandeurs sont stationnaires et la bobine se comporte comme un fil. On a donc

$$u_L(t) = 0 \quad \text{et} \quad i(t) = 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty$$

On prévoit donc un régime transitoire durant lequel la tension augmente et le courant diminue.

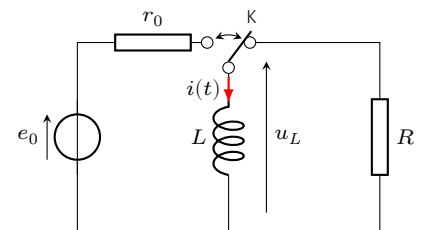


FIG. 3.5 : Montage R-L.

Si la bobine présente une résistance interne r , il suffit de remplacer dans les calculs r_0 par $r_0 + r$.

Régime transitoire

Cherchons l'évolution du courant et de la tension inductive $u_L(t)$ à partir de $t = 0$. La loi des mailles implique

$$u_L(t) + Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

Si la bobine présente une résistance interne r , il faut écrire $\tau = L/(r + R)$.

ce qui donne, en posant $\tau = L/R$,

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \text{pour } t > 0 \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

Les solutions de cette équation différentielle du premier ordre sont de la forme $i = Ae^{-t/\tau}$. On détermine la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale $i(0^+) = e_0/r_0$. Il en sort

$$i(t) = \frac{e_0}{r_0} e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{Re_0}{r_0} e^{-t/\tau}$$

Tension et courant relaxent exponentiellement avec une constante de temps $\tau = L/R$. La mesure de ce temps caractéristique peut permettre de mesurer la self-inductance d'une bobine par exemple.

À retenir

Le dipôle RL présente un temps de relaxation $\tau = L/R$.

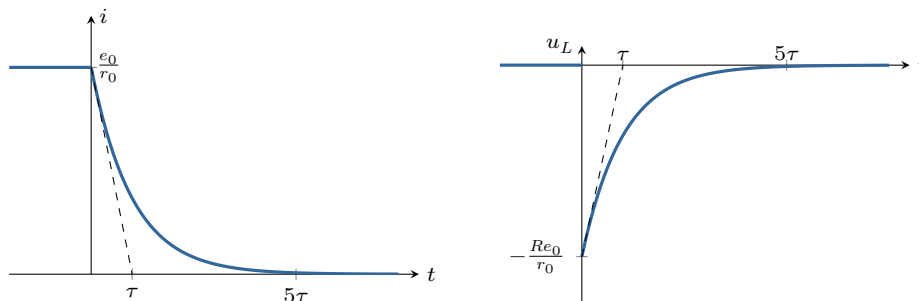


FIG. 3.6 : Évolution du courant et de la tension inductive.

Dans les anciens véhicules, l'allumage du moteur à explosion reposait sur l'amplification d'une telle surtension.

Contrairement au courant, la tension inductive subit une discontinuité au moment du basculement de l'interrupteur. Cette surtension peut devenir relativement importante si $R \gg r_0$.

Bilan énergétique

Comme pour le dipôle RC, l'énergie magnétique stockée initialement dans la bobine $W_B = \frac{1}{2}Li^2$ décroît avec un temps de relaxation $\tau_E = \tau/2$. La conservation de l'énergie électrique s'écrit

$$\underbrace{\frac{d(1/2Li^2)}{dt}}_{\text{puissance stockée}} + \underbrace{Ri^2}_{\text{puissance dissipée}} = 0$$

En remplaçant i^2 par $2W_B/L$ on aboutit à l'équation décrivant l'évolution de l'énergie magnétique stockée dans la bobine :

$$\frac{dW_B}{dt} + \frac{2}{\tau}W_B = 0 \Rightarrow W_B = W_{M,i} e^{-t/\tau_E}$$

Là aussi, l'énergie stockée est complètement dissipée par effet Joule puisque

$$\int_0^\infty Ri^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{Re_0^2}{r_0^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} Li_0^2$$

3.4 Oscillateur RLC

Montage RLC série

Alimentons un circuit constitué d'une bobine d'induction d'auto-inductance L en série avec un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R . Un interrupteur permet de mettre en contact la source continue de f.é.m e_0 avec le dipôle RLC. Nous supposons qu'avant de fermer l'interrupteur, le condensateur est déchargé.

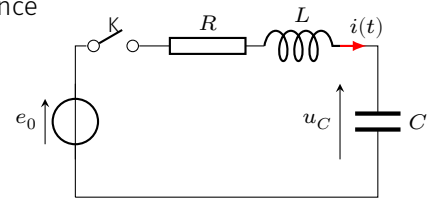


FIG. 3.7 : Montage RLC série.

On inclut dans R la résistance interne de la bobine et de la source, ainsi que la résistance des fils.

Quelles sont les conditions aux limites du problème ?

- ▶ Juste après la fermeture de l'interrupteur, la continuité de la tension capacitive et du courant traversant la bobine, impose

$$i(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad u_C(0^+) = 0$$

- ▶ Une fois le régime permanent établi, les grandeurs électriques sont stationnaires, et l'on peut remplacer la bobine par un fil. On a alors pour $t \rightarrow \infty$

$$q(t) = C^{te} \Rightarrow i(t) = 0 \quad \text{et} \quad u_C(t) = e_0$$

Mise en équation

La loi des mailles donne pour $t > 0$

$$e_0 = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_C}{dt} \quad (3.5)$$

Choisissons d'étudier la tension capacitive $u_C(t)$. Celle-ci obéit donc à l'équation-différentielle

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 2\lambda = \frac{R}{L} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases} \quad (3.6)$$

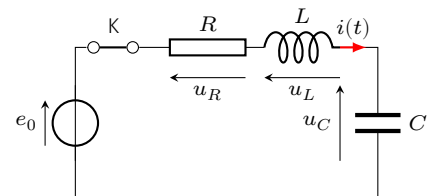


FIG. 3.8 : Circuit pour $t > 0$.

équation canonique d'un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement λ , soumis à une excitation constante.

Avant d'expliciter la forme des solutions, remarquons que le comportement de cet oscillateur ne dépend que de deux paramètres : λ et ω_0 qui sont homogènes à l'inverse d'un temps. On peut donc former deux temps caractéristiques

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC} \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{2L}{R}$$

Une solution particulière est $u_C(t) = e_0$, et les solutions de l'équation homogène se mettent sous la forme $u_C(t) = A e^{rt}$ avec r solution de l'équation caractéristique du second degré

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$ a son signe qui dépend de la valeur de la résistance. En effet, si l'on définit $R_c = 2\sqrt{L/C}$, on a

$$\Delta \leq 0 \quad \text{si} \quad R \leq R_c \quad \text{et} \quad \Delta \geq 0 \quad \text{si} \quad R \geq R_c$$

R_c est la **résistance critique** de l'oscillateur RLC série.

Régimes transitoires

Suivant le signe du discriminant, et donc la valeur de la résistance, on distingue trois régimes transitoires différents.

Régime pseudo-périodique : $R < R_c$ – Dans ce cas, le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et les racines sont complexes :

$$r = -\lambda \pm i\omega \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

La solution réelle est de la forme

$$u_C(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) + e_0$$

La tension capacitive oscille donc avant de se stabiliser à sa valeur imposée par le générateur. L'amortissement des oscillations est caractérisée par la constante de temps $\tau_2 = 2L/R$. Plus la résistance est faible, plus longue est la durée du régime transitoire. Dans ce régime, c'est la bobine qui impose son temps de réponse au système.

Les oscillations amorties se caractérisent également par une **pseudo-période** T , durée entre deux maxima successifs, qui est aussi la période de $\cos(\omega t + \varphi)$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Régime aperiodique : $R > R_c$ – Le discriminant de l'équation caractéristique est positif et les solutions sont réelles :

$$r_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

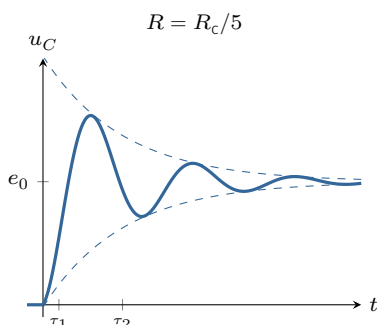


FIG. 3.9 : Régime pseudo-périodique.

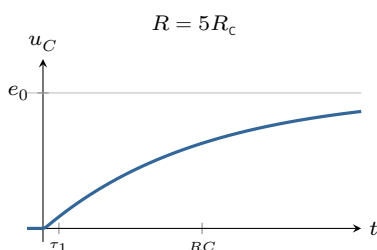


FIG. 3.10 : Régime aperiodique.

La solution s'écrit

$$u_C(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t} + e_0 \quad \text{avec} \quad r_{\pm} < 0$$

Les deux racines étant négatives, chaque exponentielle tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$: l'oscillateur atteint l'équilibre sans osciller et d'autant plus lentement que l'amortissement est fort. L'exponentielle la plus lente impose son temps de relaxation. On montre⁷ que si l'amortissement est fort, c'est le condensateur qui impose son temps de réponse.

Régime critique : $R = R_c$ – Le discriminant de l'équation caractéristique est nulle et la racine est double : $r = -\omega_0$. La solution s'écrit alors

$$u_C(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} + e_0$$

L'oscillateur atteint l'équilibre sans osciller (on dit qu'il n'y a pas de dépassement). Dans ce cas, les deux constantes de temps τ_1 et τ_2 sont identiques et correspondent au temps de relaxation du dipôle. On montre que le régime critique permet d'atteindre le régime forcé le plus rapidement possible sans dépassement. Autrement dit le temps de relaxation d'un circuit RLC est minimum en régime critique et vaut

$$\tau_{\min} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC}$$

Aspects énergétiques

Multiplions par $i(t)$ la loi des mailles (3.5) :

$$e_0 i(t) = Ri(t)^2 + L \frac{di(t)}{dt} i(t) + u_C i(t) \quad \text{avec} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

Faisons intervenir l'énergie emmagasinée sous forme électromagnétique $W_{EB} = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_C^2$:

$$e_0 i(t) = Ri(t)^2 + \frac{dW_{EB}}{dt}$$

équation qui traduit la conservation de l'énergie. En effet, la puissance fournie par la source de tension ($e_0 i$) est pour une part dissipée par la résistance (Ri^2) et pour une autre stockée dans la bobine et le condensateur (dW_{EB}/dt).

L'énergie totale fournie par la source pendant le régime transitoire vaut

$$W_f = \int_0^{\infty} e_0 i(t) dt = e_0 \int_0^{\infty} \frac{dq(t)}{dt} dt = e_0 [q(\infty) - q(0)] = Ce_0^2$$

à la fin, une partie de cette énergie se retrouve stockée (notamment dans le condensateur) :

$$W_{EB} = \frac{1}{2} Li(\infty)^2 + \frac{1}{2} Cu_C(\infty)^2 = \frac{1}{2} Ce_0^2$$

7 : La constante de temps de l'exponentielle la plus lente vaut $\tau = 1/|r_+|$ avec $r_+ = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. Pour $\lambda \gg \omega_0$ un développement limité donne $r_+ \approx -\omega_0^2/2\lambda$ soit $\tau \approx RC$.

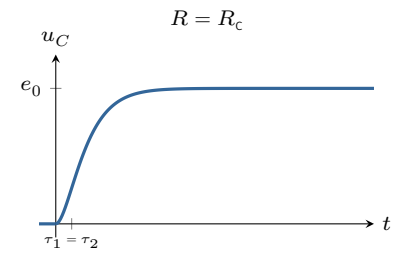


FIG. 3.11 : Régime critique.

Autrement dit, l'énergie dissipée par effet Joule vaut

$$W_{\text{diss}} = W_f - W_{EB} = \frac{1}{2} C e_0^2$$

50% de l'énergie fournie par la source est irrémédiablement perdue, ceci quelle que soit la durée du régime transitoire.

On étudie dans ce cours les circuits électriques linéaires en régime sinusoïdal forcé. Dans ce cas, il est intéressant d'introduire le concept d'impédance complexe. Les lois de l'électricité se transforment alors en équations algébriques simples à résoudre.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/regime-sinusoidal.php>

4.1 Signaux périodiques

Généralités sur les signaux périodiques

Un signal temporel $y(t)$ constitué par un motif de durée T qui se répète à l'identique, est dit périodique, et T représente la **période** du signal. Mathématiquement, le signal vérifie

$$y(t + T) = y(t) \quad \forall t$$

Il est facile de voir que si T est une période, alors $2T$ l'est également. C'est pourquoi, par convention, la période est la plus petite valeur possible de T telle $y(t + T) = y(t)$ pour tout t .

Le nombre ν de périodes dans une seconde s'appelle la **fréquence** et s'exprime en hertz (Hz), en hommage à Hertz¹ :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

Les appareils de mesure électrique (voltmètre, ampèremètre, oscilloscope, etc.) permettent d'accéder à différentes grandeurs.

- ▶ La valeur continue représente la grandeur moyenne du signal :

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

- ▶ La valeur crête-à-crête correspond à l'écart entre la valeur maximum et la valeur minimum :

$$y_{pp} = \max(y) - \min(y)$$

- ▶ La valeur efficace ou valeur RMS² représente la racine de la moyenne du carré du signal :

$$y_{rms} = \sqrt{\overline{y^2}}$$

- 4.1 Signaux périodiques . . . 35
 - Généralités 35
 - Le signal sinusoïdal . . . 36
 - Représentations d'un sinus 38
 - Régime forcé 39
- 4.2 Impédance et admittance 40
 - Définitions 40
 - Exemples 40
 - Lois d'association 41
 - Méthodes de résolution . 42
- 4.3 Puissance en régime forcé 43
 - Puissance active 43
 - Facteur de puissance . . . 43

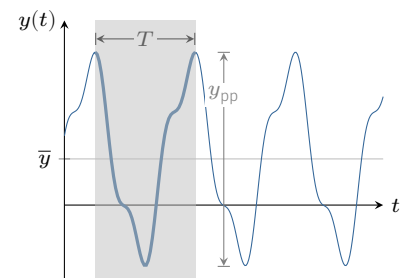


FIG. 4.1 : Caractéristiques d'un signal périodique.

1 : **Heinrich Hertz (1857-1894)** : physicien théoricien, il réussit la première émission et réception d'ondes radio en 1887, sur une distance de 20 mètres donnant du même coup une preuve de la validité de la théorie électromagnétique de Maxwell. Dans les milieux scientifiques, il est considéré comme le découvreur de la radio. C'est la raison pour laquelle on a donné le nom d'« ondes hertziennes » aux signaux radio et pourquoi l'unité de la fréquence vibratoire –appelée « cycle » au départ– a été remplacée par « hertz ».

2 : Acronyme anglais pour *Root Mean Square*

3 : sous certaines conditions mathématiques peu restrictives en électricité

Dans la suite, on se limite aux signaux sinusoïdaux. En effet, le théorème de Fourier stipule³ qu'un signal périodique de fréquence ν se décompose, en sinus et cosinus de fréquences multiples de la fréquence ν :

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k\nu t) + b_k \sin(2\pi k\nu t)$$

où a_0 représente la valeur moyenne (sa composante continue) et $a_k \cos(2\pi k\nu t) + b_k \sin(2\pi k\nu t)$ la k^{e} harmonique. Si l'on connaît tous les coefficients a_k et b_k , appelés coefficients de Fourier, on peut reconstruire complètement le signal périodique. Or, puisque l'on étudie des réseaux linéaires, si l'on connaît leur comportement vis à vis d'un signal sinusoïdal quelconque, on est capable de connaître, par combinaison linéaire, la réponse vis à vis de n'importe quelle signal périodique, ce qui justifie l'étude de la réponse en régime sinusoïdal.

Le signal sinusoïdal

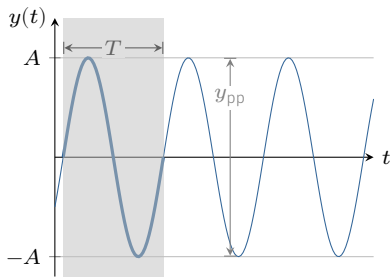


FIG. 4.2 : Signal sinusoïdal.

Un signal sinusoïdal $y(t)$ s'exprime par

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

A désigne l'amplitude, ϕ la phase (en radian) et ω la pulsation (en rad/s). Le signal est bien périodique puisque l'équation

$$\cos(\omega t + \phi + \omega T) = \cos(\omega t + \phi) \quad \forall t$$

admet comme solution

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \heartsuit \quad (4.2)$$

Par ailleurs, on voit sur le graphe qu'un signal sinusoïdal ne présente pas de composante continue ($\bar{y} = 0$). La valeur crête-à-crête donne immédiatement l'amplitude car $y_{pp} = 2A$. Enfin, on peut calculer la valeur efficace à partir de la définition. Pour tout signal sinusoïdal on trouve

$$y_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \heartsuit \quad (4.3)$$

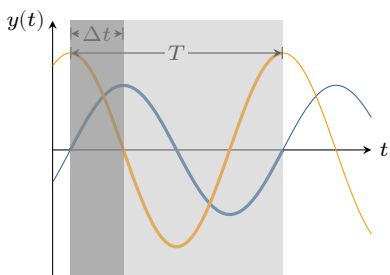


FIG. 4.3 : Déphasage.

Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux – La phase est une grandeur qui dépend du choix de l'origine des temps; autrement dit, la phase est arbitraire. En revanche, le **déphasage** entre deux signaux sinusoïdaux caractérise le décalage entre les deux courbes sinusoïdales et ne dépend pas du choix de l'origine des temps. Considérons par exemple deux signaux sinusoïdaux :

$$y_1 = A \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y_2 = B \cos(\omega t + \phi)$$

Les phases respectives de y_1 et y_2 sont $\phi_1 = 0$ et $\phi_2 = \phi$.

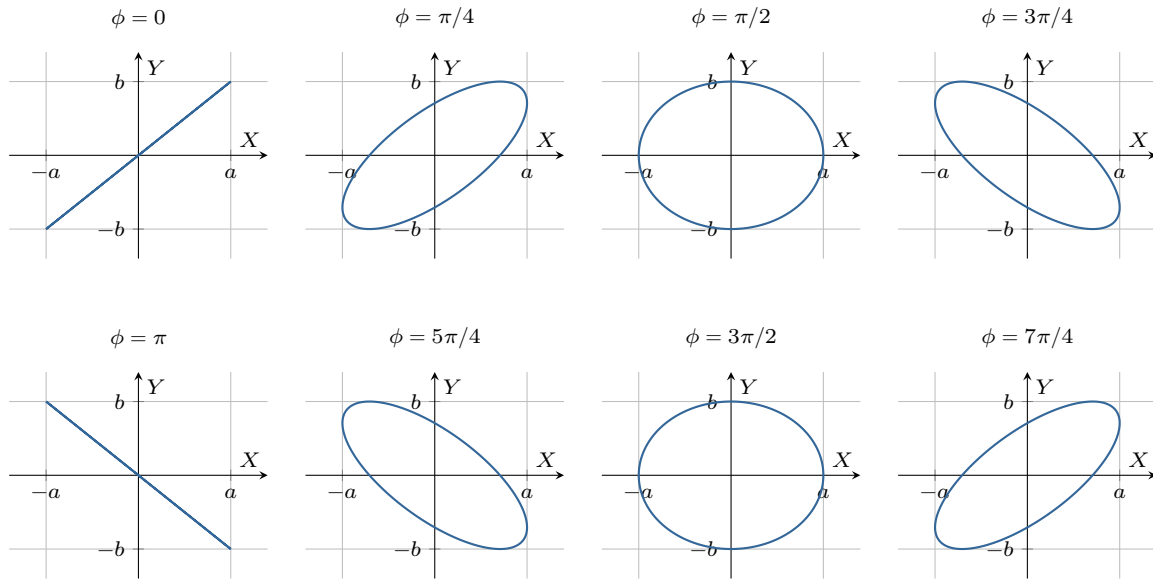


FIG. 4.4 : Deux signaux sinusoïdaux déphasés de ϕ en mode XY.

Le déphasage de y_2 par rapport à y_1 vaut $\phi_2 - \phi_1 = \phi$. Si $\phi > 0$ on dit que y_2 est en avance sur y_1 , sinon y_2 est en retard sur y_1 . Pour mesurer ϕ il suffit de déterminer le décalage entre deux sommets par exemple. En effet, d'après l'expression de y_1 on voit que le signal atteint son maximum en $t = 0$, alors que y_2 atteint son maximum en $t = -\frac{\phi}{\omega}$. Ainsi si $\phi > 0$, le signal y_2 est décalé vers la gauche et atteint son maximum avant le signal y_1 : il est donc en avance. La relation entre le déphasage et le décalage temporel est donné par

$$\phi = \frac{2\pi}{T} \times \Delta t$$

Visualisation en mode XY – Lorsque l'on injecte un signal sinusoïdal sur la voie X d'un oscilloscope et un autre sur la voie Y, puis que l'on commute l'oscilloscope en mode XY, on obtient une courbe paramétrique d'équation

$$\begin{cases} X(t) = a \cos(\omega t) \\ Y(t) = b \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation paramétrique d'une ellipse circonscrite dans un rectangle $2a \times 2b$ et dont l'excentricité e varie avec ϕ (FIG. 4.4). Cette représentation permet de repérer aisément la situation où les deux signaux sont en phase ($\phi = 0$) ou en opposition de phase ($\phi = \pi$).

Exercice – Un générateur délivre une tension sinusoïdale $u_1(t)$ de fréquence 100 Hz de valeur efficace 5,0 V. Un autre générateur délivre une tension sinusoïdale de même fréquence, de tension crête-à-crête 4,8 V et en avance de 90° sur $u_1(t)$. En considérant que la phase à l'origine de $u_1(t)$ est nulle, donner les expressions mathématiques des deux tensions.

Rép. $u_1(t) = 7,1 \cos(200\pi t)$ et $u_2(t) = 2,4 \cos(200\pi t + \pi/2)$

Représentations d'un signal sinusoïdal

Représentation de Fresnel – Considérons un signal sinusoïdal $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. On peut représenter cette grandeur sous la forme d'un vecteur dit *phaseur* ou *vecteur de Fresnel*. Il s'agit d'un vecteur faisant un angle $\omega t + \phi$ avec l'axe des abscisses et une longueur A . L'intérêt de cette représentation réside dans le fait que la somme de deux signaux sinusoïdaux s'obtient en sommant vectoriellement les vecteurs de Fresnel. Le déphasage entre deux signaux correspond alors à l'angle entre les vecteurs de Fresnel.

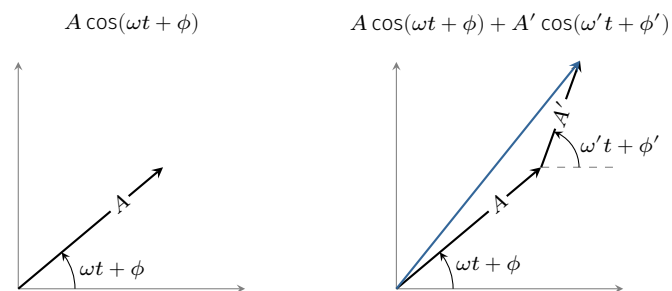


Fig. 4.5 : Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal et d'une somme de deux signaux sinusoïdaux.

En électricité on convient de remplacer le nombre complexe i par j pour éviter toute confusion avec l'intensité électrique.

Représentation complexe – Il existe une autre représentation très utile : on peut considérer que $y(t)$ est la partie réelle d'un nombre complexe :

$$y(t) = \operatorname{Re}(\underline{y}(t)) \quad \text{avec} \quad \underline{y}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{et} \quad j^2 = -1$$

On dira alors que $\underline{y}(t)$ est le **nombre complexe associé au signal sinusoïdal**. On peut l'écrire sous la forme

$$\underline{y}(t) = \underline{A} e^{j(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = A e^{j\phi} \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

Le nombre complexe \underline{A} est appelé **amplitude complexe**. Lorsque l'on connaît l'amplitude complexe d'un signal on peut en déduire l'amplitude du signal réel ainsi que la phase via les relations

$$A = |\underline{A}| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{A})$$

Pour deux signaux sinusoïdaux y_1 et y_2 d'amplitude complexe \underline{A}_1 et \underline{A}_2 , le **déphasage de y_2 par rapport à y_1** vaut :

$$\phi = \arg(\underline{A}_2) - \arg(\underline{A}_1) = \arg\left(\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1}\right)$$

L'intérêt de la notation complexe réside dans la simplification des calculs différentiels. Par exemple dériver un sinus revient à multiplier par $j\omega$ le nombre complexe :

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow j\omega y$$

Établissement du régime sinusoïdal forcé

Pour illustrer ce que représente le régime sinusoïdal forcé, prenons l'exemple d'un circuit RLC série alimenté par un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale de pulsation ω . Ce signal d'excitation s'écrit $e(t) = E \cos \omega t$.

Observons l'évolution du signal d'excitation sur la voie 1 d'un oscilloscope (CH1) et la tension capacitive sur la voie 2 (CH2).

La loi des mailles donne

$$e(t) - Ri(t) - L \frac{di}{dt} - u_C(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

ce qui donne, après avoir posé $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$,

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E \cos(\omega t) \quad \text{pour} \quad t > 0$$

Du point de vue mathématique, la solution se compose de deux termes.

- ▶ Le premier terme correspond à la solution de l'équation homogène et représente le régime libre d'un oscillateur. Ce régime est transitoire puisqu'il se dissipe au bout d'un certain temps.
- ▶ Le second est une solution particulière de la forme $A \cos(\omega t + \phi)$. Il représente le *régime sinusoïdal forcé*. Ce régime ne se dissipe pas contrairement au régime transitoire; il est entretenu par la source.

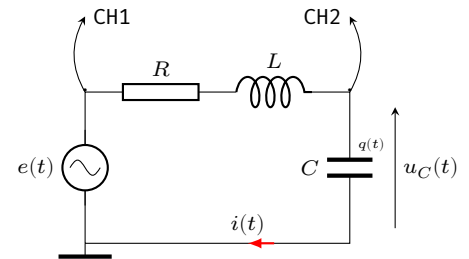
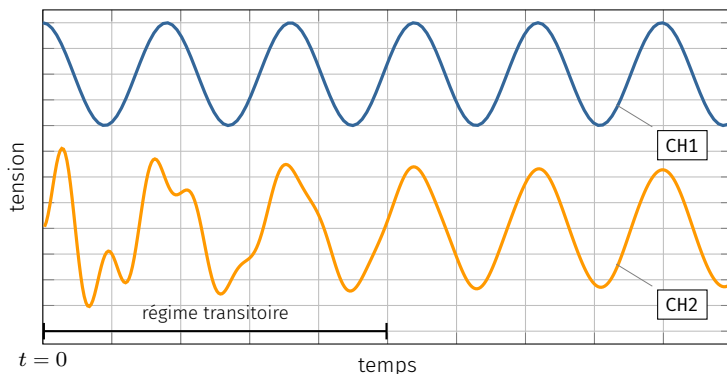


FIG. 4.6 : Montage RLC.

FIG. 4.7 : Établissement du régime sinusoïdal (paramètres : $\omega = 0,35 \omega_0$ et $Q = 10$).

La FIG. 4.7 montre l'établissement du régime forcé, c'est-à-dire la disparition du régime transitoire au détriment d'un régime sinusoïdal permanent de même fréquence que l'excitation. On note la présence du régime transitoire par l'apparition d'interférences entre deux signaux non synchrones (de fréquences différentes). En effet, avec un grand facteur de qualité, le régime transitoire fait apparaître des oscillations faiblement amorties de fréquence voisine de la fréquence propre qui se superpose au régime sinusoïdal forcé.

Régime sinusoïdal forcé

Lorsque le régime transitoire s'est dissipé, toutes les grandeurs électriques oscillent de façon sinusoïdale à la même fréquence

que l'excitateur (fréquence imposée par le G.B.F.). On s'intéresse aux propriétés électriques des circuits une fois ce régime sinusoïdal installé.

4.2 Notion d'impédance et d'admittance

Définitions

Supposons un réseau linéaire constitué de sources sinusoïdales de même fréquence ν . Une fois le régime transitoire dissipée, un régime sinusoïdal de fréquence ν s'installe dans toutes les branches du réseau.

On adopte la représentation complexe : notons \underline{U} l'amplitude complexe associée à la tension et \underline{I} l'amplitude complexe associée à l'intensité. Par définition, l'impédance d'un dipôle passif linéaire s'écrit

$$\underline{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

où R désigne la résistance et X la réactance. Z se mesure en ohm (Ω). Notez que la notion d'impédance n'a de sens que pour un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal. On définit également l'admittance du dipôle, qui vaut

$$\underline{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\underline{Z}} = G + jS$$

où G désigne la conductance et S la susceptance. Y se mesure en siemens (S ou Ω^{-1}).

On peut déterminer l'impédance d'un dipôle passif linéaire en le soumettant à une tension sinusoïdale puis en effectuant les mesures de la tension efficace, de l'intensité efficace ainsi que du déphasage entre le courant et la tension électrique. En effet, d'après (4.5), on a

$$|\underline{Z}| = \frac{U_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}) = \phi_u - \phi_i \quad \heartsuit \quad (4.6)$$

Exemples

On retiendra les impédances des trois dipôles passifs linéaires suivants :

TAB. 4.1 : Quelques dipôles linéaires et leur impédance.

Conducteur ohmique	Bobine	Condensateur
$u(t) = R i(t)$	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$
$\underline{u} = R \underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega \underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega \underline{u}$
$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega}$

On remarque que le conducteur ohmique n'introduit pas de déphasage entre la tension et le courant puisque l'impédance d'une résistance est réelle et se confond avec sa résistance. En revanche la bobine et le condensateur introduisent un déphasage de $\pi/2$: on dit que courant et tension évoluent en *quadrature de phase*. Dans le cas de la bobine idéale, c'est la tension inductive qui est en avance de $\pi/2$ par rapport au courant alors qu'aux bornes d'un condensateur idéal, la tension capacitive est en retard de $\pi/2$.

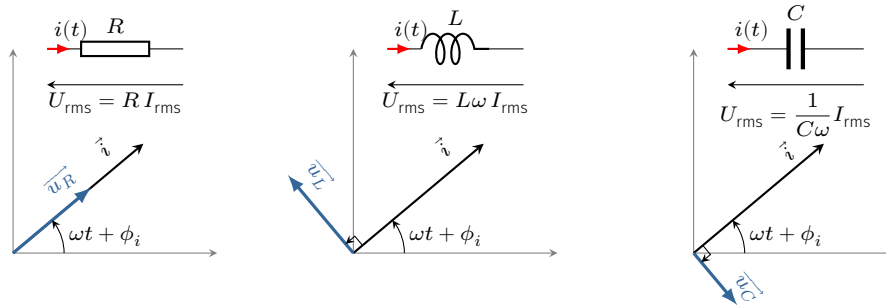


FIG. 4.8 : Impédances : représentations de Fresnel.

Lois d'association

En régime sinusoïdal forcé, à chaque grandeur électrique (courant, tension) correspond une grandeur complexe associée. L'écriture de la loi des mailles et celle des nœuds aboutit à des équations algébriques dans \mathbb{C} . En conséquence, les formules d'association des résistances s'étendent aux impédances complexes :

$$\text{en série, } \underline{Z}_{eq} = \sum_i \underline{Z}_i \quad \text{et en parallèle, } \underline{Y}_{eq} = \sum_i \underline{Y}_i \quad \heartsuit (4.7)$$

Exemple – la bobine réelle

Une bobine réelle de résistance interne r et de self-inductance L est soumise à la tension $u(t) = E \cos(\omega t)$. Cherchons l'expression de l'intensité du courant électrique en régime forcé.

Tout d'abord, la bobine réelle se modélise par une résistance r en série avec une bobine idéale de self inductance L . Son impédance s'écrit donc

$$\underline{Z} = r + jL\omega$$

La définition de l'impédance permet d'obtenir l'intensité du courant en notation complexe :

$$\underline{i} = \frac{u}{\underline{Z}} = \frac{E e^{j\omega t}}{r + jL\omega}$$

soit

$$\underline{i} = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2} (r - jL\omega) e^{j\omega t}$$

On obtient l'intensité en prenant la partie réelle de \underline{i} :

$$i(t) = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2} [r \cos(\omega t) + L\omega \sin(\omega t)]$$

Méthodes de résolution d'un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé

Dans un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont sinusoïdales. On peut remplacer chaque dipôle passif par son impédance et les sources par les grandeurs complexes associées. Les équations de Kirchhoff (loi des noeuds + loi des mailles) exprimées à l'aide des grandeurs complexes associées, donnent alors des équations algébriques :

$$\sum_k \epsilon_k u_k = 0 \quad \text{loi des mailles} \quad \text{et} \quad \sum_k \epsilon_k i_k = 0 \quad \text{loi des noeuds}$$

Les problèmes sont donc identiques à ceux rencontrés en régime continu, à ceci près que les grandeurs recherchées sont des nombres complexes, caractérisées par une amplitude (le module) et une phase (l'argument).

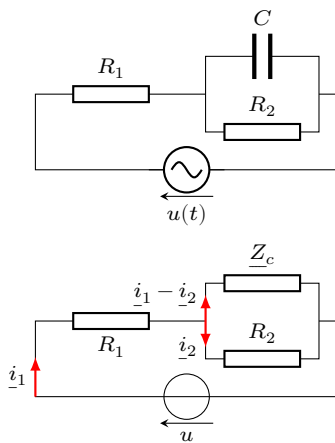


FIG. 4.9 : Exemple de circuit avec sa représentation complexe.

Exemple

Considérons le circuit ci-contre alimenté par un générateur basse fréquence réglé sur 50 Hz. La valeur efficace de la tension $u(t)$ appliquée vaut 1000 V. Cherchons les valeurs efficaces des courants électriques dans chaque branche sachant que $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 320 \text{ k}\Omega$ et $C = 25 \text{ nF}$.

En parcourant toutes les branches et en appliquant systématiquement loi des noeuds, on s'aperçoit qu'il y a deux inconnues en courant : i_1 et i_2 . Il suffit d'écrire deux lois des mailles, par exemple :

$$\begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 = u \\ Z_c (i_1 - i_2) - R_2 i_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} i_1 = \frac{Z_c + R_2}{Z_c(R_1 + R_2) + R_1 R_2} u \\ i_2 = \frac{Z_c}{Z_c(R_1 + R_2) + R_1 R_2} u \end{cases}$$

Sachant que $Z_c = 1/jC\omega$, on trouve

$$i_1 = \frac{1 + jR_2 C \omega}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C \omega} u \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C \omega} u$$

On obtient les amplitudes en prenant les modules de ces nombres complexes. En divisant par $\sqrt{2}$ on trouve les valeurs efficaces. On obtient

$$I_{1,rms} = \sqrt{\frac{1 + (R_2 C \omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C \omega)^2}} U_{rms} = 7,2 \text{ mA}$$

et

$$I_{2,rms} = \frac{1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C \omega)^2}} U_{rms} = 2,7 \text{ mA}$$

Pour le courant i_c qui traverse le condensateur, on a

$$i_c = i_1 - i_2 = \frac{jR_2 C \omega}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C \omega} u$$

D'où l'on tire

$$I_{c,rms} = \frac{R_2 C \omega}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C \omega)^2}} U_{rms} = 6,7 \text{ mA}$$

4.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé

Puissance absorbée par un dipôle linéaire

Alimentons un dipôle linéaire passif par une tension sinusoïdale $u(t)$. En régime sinusoïdal forcé, le courant d'alimentation d'intensité $i(t)$ est également sinusoïdal. Écrivons

$$u(t) = \sqrt{2}U_{\text{rms}} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i(t) = \sqrt{2}I_{\text{rms}} \cos(\omega t - \phi)$$

avec ϕ le **déphasage de la tension par rapport au courant**. Exprimons la puissance \mathcal{P} reçue par le dipôle. À partir de l'identité $\cos a \cos b = 1/2[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, on obtient

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t) = U_{\text{rms}}I_{\text{rms}}[\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

La puissance instantanée oscille à la pulsation 2ω autour de $U_{\text{rms}}I_{\text{rms}} \cos \phi$. Ce terme représente la puissance moyenne injectée dans le dipôle, ou *puissance active*.

Définition

La **puissance active** est la puissance électrique moyenne reçue par le dipôle :

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = U_{\text{rms}}I_{\text{rms}} \cos \phi$$

La puissance active permet d'obtenir l'énergie fournie à un dipôle pendant la durée Δt . En effet, si la durée Δt est grande devant la période T du signal électrique, on a

$$\mathcal{E} = \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P} dt = \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P} dt \right) \Delta t \simeq \overline{\mathcal{P}} \times \Delta t$$

En conséquence, l'énergie se conservant, si un circuit alimenté par une source alternative possède N dipôles passifs consommant chacun une puissance active $\overline{\mathcal{P}}_i$, alors la puissance moyenne délivrée par la source vaut

$$\overline{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^N \overline{\mathcal{P}}_i \quad \heartsuit \quad (4.8)$$

Exercice – L'emballage d'une ampoule « basse consommation » indique : 230 V – 150 mA – 20 W – 50 Hz. En déduire l'expression de son impédance complexe.

Rép. $\underline{Z} = (889 + j1249) \Omega$.

Facteur de puissance

Par définition le facteur de puissance d'un dipôle passif est le rapport de la puissance active reçue $\overline{\mathcal{P}}$ sur la puissance apparente $U_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$

(en V.A). En régime sinusoïdal,

$$\text{Facteur de puissance} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos \phi \quad \heartsuit \quad (4.9)$$

Rappelons que le déphasage s'obtient à partir de l'impédance complexe du dipôle :

$$\phi = \arg(\underline{Z})$$

4 : C'est le cas d'un conducteur ohmique mais ce n'est pas le seul cas.

Ainsi, pour un dipôle dont l'impédance est réelle⁴ ($\underline{Z} = R$), on a $\phi = 0$ soit un facteur de puissance égal à 1. Dans ce cas, le dipôle absorbe une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}} = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = R I_{\text{rms}}^2$$

On peut d'ailleurs donner un nouveau sens physique à l'intensité efficace : cela correspond à l'intensité du courant continu qui produirait la même dissipation d'énergie dans une résistance.

Pour un dipôle purement inductif ou capacitif (on dit réactif), l'impédance complexe est un nombre imaginaire pur d'où $\phi = \pm\pi/2$. Par conséquent $\overline{\mathcal{P}} = 0$: le dipôle n'absorbe pas de puissance électrique en moyenne⁵.

5 : Bien entendu, le dipôle reçoit de l'énergie ou en donne mais comme il passe autant de temps à recevoir de l'énergie qu'à en délivrer, en moyenne, le bilan est nul.

Dans le cas d'un dipôle passif linéaire quelconque, c'est-à-dire présentant une impédance avec une partie réelle non nulle, on a

$$\underline{Z} = R + jX \quad \Rightarrow \quad \cos \phi = \frac{R}{|\underline{Z}|}$$

La puissance active s'écrit

$$\overline{\mathcal{P}} = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \frac{R}{|\underline{Z}|} = R I_{\text{rms}}^2$$

Finalement, en régime sinusoïdal tout dipôle passif linéaire reçoit une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}} = R I_{\text{rms}}^2 \quad \text{où} \quad R = \text{Re}(\underline{Z}) \quad \heartsuit \quad (4.10)$$

Importance du facteur de puissance – Le distributeur d'électricité facture généralement la puissance électrique moyenne consommée par l'installation concernée. En revanche, la puissance gaspillée par effet joule dans les lignes de transport est facturée globalement. C'est pourquoi les distributeurs d'électricité appliquent une surfacturation lorsque le facteur de puissance d'une installation est trop faible.

En effet, une installation industrielle présente en général un caractère inductif important dû à la présence des moteurs (bobinages) d'où un $\cos \phi$ qui peut être faible. Si l'installation consomme une puissance active $\overline{\mathcal{P}}$, alors le courant d'alimentation a pour valeur efficace

$$I_{\text{rms}} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}} \cos \phi}$$

À cette intensité correspond une puissance dissipée par effet joule

dans la ligne de transport qui vaut

$$P_{\text{ligne}} = RI_{\text{rms}}^2 = \frac{R\bar{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}}^2 \cos^2 \phi}$$

où R représente la résistance des lignes électriques. Ainsi, une faible valeur du facteur de puissance entraîne une perte d'énergie électrique en ligne plus importante ce qui explique pourquoi le distributeur d'électricité facture le coût d'électricité d'autant plus cher que le facteur de puissance est faible.

Si l'on veut éviter cette surfacturation il faut alors procéder à un *relevage du facteur de puissance*. En général, adjoindre un condensateur en parallèle de l'installation permet de remonter la valeur du $\cos \phi$.

Dans une chaîne d'analyse et de traitement du signal, il arrive fréquemment que l'information intéressante soit dissimulée au sein d'un signal plus complexe, voire parasitée par du bruit. On peut souvent l'extraire par filtrage, en agissant dans l'espace des fréquences. Les premiers filtres étaient de nature analogiques, et sont encore couramment employés en instrumentation, en électronique de puissance et dans les systèmes haute fréquence.

Actuellement les filtres numériques programmables ont tendance à remplacer les filtres analogiques, mais dans ce chapitre, on se concentre sur les filtres analogiques passifs.

Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/filtrage-passif.php>

- 5.1 Fonction de transfert . . . 47
 - Généralités 47
 - Bande passante 49
 - Diagramme de Bode . . . 50
 - Réponse temporelle . . . 51
- 5.2 Filtrage passe-haut 51
 - Filtre du premier ordre . . 51
 - Comportement dérivateur 53
 - Filtres plus performants . 54
- 5.3 Filtrage passe-bas 55
 - Introduction 55
 - Comportement intégrateur 56
 - Filtre de Butterworth . . . 58
- 5.4 Filtre passe-bande 59
 - Introduction 59
 - Filtre RLC 60
- 5.5 Stabilité 61
 - Relation différentielle . . 61
 - Condition de stabilité . . 62

5.1 Fonction de transfert

Généralités

Pour extraire un signal utile, on aura en général besoin d'un système qui transforme un signal d'entrée $e(t)$ (de nature électrique, mécanique, acoustique, etc.) en un signal de sortie $s(t)$ (de nature électrique, mécanique, acoustique, etc.). On peut penser à un capteur, un amplificateur, un intégrateur, un correcteur de phase, etc.

On appelle **filtre** un tel système si :

- ▶ ses caractéristiques sont invariantes dans le temps;
- ▶ son comportement respecte le principe de superposition¹.

La réponse d'un filtre peut alors être modélisée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type

$$\alpha_0 e(t) + \alpha_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = \beta_0 s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + \beta_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

Les filtres font jouer un rôle particulier aux signaux sinusoïdaux, puisque lorsque l'on envoie un signal sinusoïdal en entrée d'un filtre, il en ressort un signal sinusoïdal de même fréquence². Si l'on pose en notation complexe $\underline{e}(t) = \underline{E} e^{j\omega t}$ et $\underline{s}(t) = \underline{S} e^{j\omega t}$, la réponse du filtre est entièrement déterminée par la **fonction de transfert** \underline{H} :

$$\underline{H}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \quad \heartsuit \quad (5.1)$$



FIG. 5.1 : Filtre.

1 : Si les signaux d'entrée e_1 et e_2 produisent indépendamment un signal de sortie s_1 et s_2 alors la combinaison $a e_1 + b e_2$ produit en sortie le signal $a s_1 + b s_2$.

2 : En effet, dériver un signal sinusoïdal redonne un signal sinusoïdal déphasé de $-\pi/2$ de sorte que l'équation différentielle a pour solution (sauf cas très particuliers) en régime permanent un signal sinusoïdal.

La fonction de transfert est une grandeur complexe qui dépend de la **pulsation** ω et des caractéristiques du filtre. Elle peut toujours se mettre sous la forme d'un quotient de deux polynômes en $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \tag{5.2}$$

On appelle **ordre du filtre** le degré du polynôme $D(j\omega)$ situé au dénominateur de la fonction de transfert.

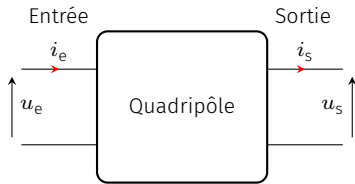


FIG. 5.2 : Quadripôle électronique.

En électronique, dans une chaîne d'analyse et de traitement du signal électrique, on rencontre couramment des filtres sous la forme de quadripôles, c'est-à-dire d'éléments possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Les grandeurs d'entrée et de sortie sont les tensions ou les courants. Le filtre est *passif* s'il ne possède que des éléments linéaires passifs (R, L, C). Dans ce cas, la puissance moyenne en sortie est toujours inférieure ou égale à la puissance moyenne en entrée, car une partie de l'énergie entrante est dissipée par le quadripôle. Le filtre est *actif* quand il contient au moins un composant électronique actif, c'est-à-dire alimenté, tel l'amplificateur linéaire intégré (ALI). Il est, dans ce cas, possible d'avoir un gain de puissance.

3 : comme c'est le cas lorsqu'on y branche un voltmètre ou un oscilloscope dont les impédances d'entrée sont suffisamment grandes pour être considérées infinies.

Dans ce cours, nous nous limitons à la réponse en tension des filtres électrocinétiques. Plus précisément, la fonction de transfert correspond à la *réponse en tension en boucle ouverte*, c'est-à-dire lorsque la sortie ne débite aucun courant³ :

$$\underline{H}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{u_s(t)}{u_e(t)} \right|_{i_s=0} \tag{5.3}$$

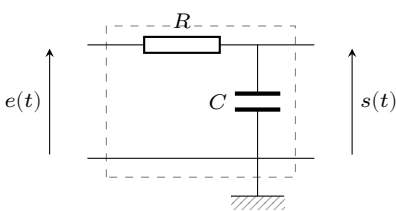


FIG. 5.3 : Filtre RC.

Exemple : filtre RC

Étudions le filtre RC formé par la mise en série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C . Le signal d'entrée sera la tension aux bornes de l'ensemble et le signal de sortie la tension aux bornes du condensateur. Nous reconnaissons un diviseur de tension, de sorte qu'en régime sinusoïdal on peut écrire

$$s(t) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} e(t) \quad \text{avec} \quad Z_R = R \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

On en déduit la fonction de transfert de ce filtre

$$\underline{H} = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Il s'agit d'un filtre du premier ordre.

Dorénavant, nous notons systématiquement e et s les tensions d'entrée et de sortie.

Bande passante

Le gain en tension d'un filtre s'obtient en prenant le module de la fonction de transfert :

$$G(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |\underline{H}(j\omega)| = \frac{S_{\text{rms}}}{E_{\text{rms}}} \quad \heartsuit \quad (5.4)$$

Souvent, le filtre présente un gain relativement constant pour un certain intervalle de fréquences alors qu'il est quasiment nul pour les autres fréquences. Le filtre élimine alors certaines harmoniques du signal.

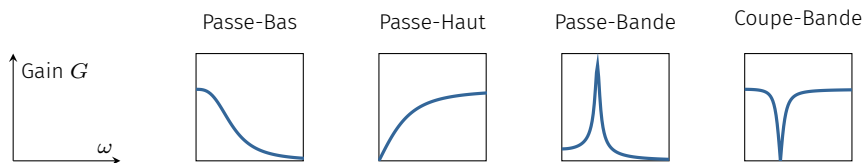


FIG. 5.4 : Types de filtre souvent rencontrés.

Suivant l'allure du gain avec la fréquence on distingue différents types de filtre :

- ▶ Le **filtre passe-bas** laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences ;
- ▶ Le **filtre passe-haut** laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences ;
- ▶ Le **filtre passe-bande** laisse passer les harmoniques situées dans une certaine bande de fréquences ;
- ▶ Le **filtre coupe-bande**⁴ coupe les harmoniques dans une certaine bande de fréquences.

Par convention, on appelle **bande passante** l'intervalle des fréquences (resp. pulsations) pour lequel G est compris entre le maximum G_{max} et $G_{\text{max}}/\sqrt{2}$. Les fréquences (resp. pulsations) qui délimitent la bande passante sont appelées **fréquences de coupure** (resp. pulsations de coupure).

Exemple

Le filtre RC étudié précédemment présente une fonction de transfert donnée par

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{soit} \quad G = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Le gain diminue avec la fréquence ; il s'agit donc d'un filtre passe-bas. Le gain est maximum lorsque $\omega = 0$ ($G_{\text{max}} = 1$) et la pulsation de coupure ω_c est telle que

$$G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

La bande passante correspond donc à l'intervalle $[0, \omega_c]$ en termes de pulsation ou $[0, \omega_c/(2\pi)]$ en termes de fréquence.

4 : On dit aussi réjecteur de bande.

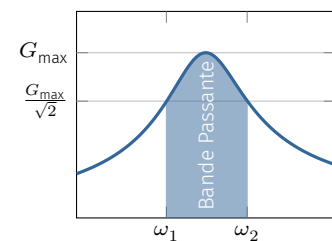


FIG. 5.5 : Bande passante.

Un filtre du premier ordre possède au plus une fréquence de coupure alors qu'un filtre du second ordre peut présenter deux fréquences de coupure. On peut alors rencontrer tous les cas de la FIG. 5.4.

Notez que dans l'exemple précédent, la bande passante a pour largeur $1/\tau$ où τ est le temps de relaxation du circuit RC. Un filtre RC de

grande bande passante est un système électrique de petit temps de réponse. On retiendra cette relation assez générale :

$$\text{RAPIDITÉ} \Leftrightarrow \text{LARGE BANDE PASSANTE.}$$

Diagramme de Bode

Afin de pouvoir étudier le comportement d'un filtre sur un large domaine fréquentiel on étudie le gain en adoptant une échelle logarithmique pour la fréquence. Par ailleurs, pour visualiser l'efficacité du filtrage il est plus commode de porter le gain en décibel⁵ défini par

$$G_{\text{dB}} \stackrel{\text{def}}{=} 20 \log_{10} G \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

5 : Par définition, 1 bel (1 B) correspond à un gain de puissance d'un facteur 10. Autrement dit, $G_B = \log_{10} \mathcal{P}_s / \mathcal{P}_e$ où \mathcal{P} désigne la puissance. Comme 1 B = 10 dB, on a $G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \mathcal{P}_s / \mathcal{P}_e$ ce qui redonne (5.5) car la puissance est proportionnelle au carré de la tension.

6 : Inventé par Hendrik Wade Bode, ingénieur américain chez Bell Laboratory.

Le diagramme de Bode⁶ est constitué de deux graphes :

- ▶ celui du gain en décibel G_{dB} en fonction de la fréquence en échelle logarithmique ;
- ▶ celui du déphasage sortie/entrée $\phi = \arg(\underline{H})$ en fonction de la fréquence en échelle logarithmique.

L'échelle logarithmique simplifie la lecture du comportement du filtre car l'essentiel du graphe est constitué de tronçons linéaires correspondants aux comportements asymptotiques.

Dans une telle représentation, les fréquences de coupure correspondent à une diminution de 3dB du gain par rapport au maximum, puisque

$$G = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad \text{donne} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} G_{\text{max}} - 10 \log_{10}(2) \simeq G_{\text{dB max}} - 3 \text{ dB}$$

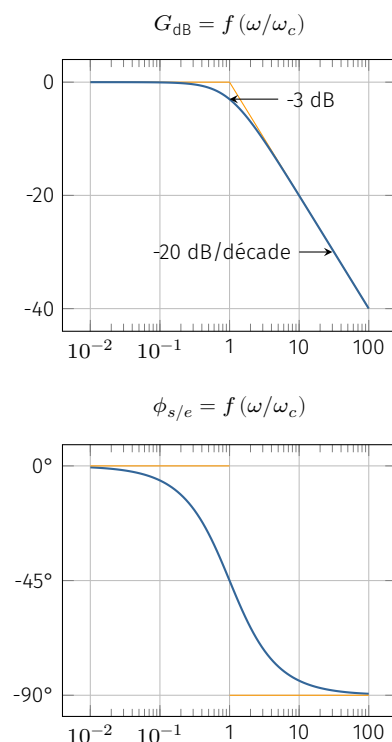


FIG. 5.6 : Diagramme de Bode d'un filtre RC. Les traits oranges correspondent aux comportements asymptotiques.

Exemple : diagramme de Bode du filtre RC

Reprenons la fonction de transfert du filtre passe-bas RC :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Le gain en décibel est alors donné par

$$G_{\text{dB}} = -10 \log_{10} [1 + (\omega/\omega_c)^2]$$

On peut distinguer deux comportements, un à basse fréquence, l'autre à haute fréquence.

À basse fréquence ($\omega \ll \omega_c$), $G_{\text{dB}} \simeq 0 \text{ dB}$: le graphe est assimilable à une portion horizontale d'ordonnée 0 dB.

À haute fréquence ($\omega \gg \omega_c$), $G_{\text{dB}} \simeq -20 \log_{10}(\omega) + 20 \log_{10}(\omega_c)$: le graphe est assimilable à une portion de droite décroissante passant par le point $(\omega_c, 0)$ et de pente -20 dB/décade ou -6 dB/octave^a.

Quant au déphasage sortie/entrée, on a

$$\phi_{s/e} = -\arg\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Ainsi, à basse fréquence, le déphasage tend vers 0 alors qu'à haute fréquence il tend vers $-\pi/2$ rad; la tension de sortie est alors en quadrature de phase par rapport à la tension d'entrée.

^a Une décade représente un intervalle $[\omega, 10\omega]$. Sur une échelle logarithmique, cela correspond à un intervalle d'une unité. Une octave désigne l'intervalle $[\omega, 2\omega]$.

Réponse du filtre soumis à une excitation périodique

Comme on l'a vu, un filtre a la particularité de produire un signal sinusoïdal lorsque l'on injecte en entrée un signal sinusoïdal. Certes, l'amplitude et la phase à l'origine peuvent différer, mais pas la forme du signal! Ça n'est plus le cas lorsque l'on envoie un signal périodique non sinusoïdal : le filtre produit une déformation du signal, et c'est bien là l'intérêt d'un filtre : nettoyer un signal du bruit, sélectionner une harmonique particulière, corriger la phase d'un signal, enlever la composante continue... sont autant de possibilités qui rendent le filtre indispensable dans une chaîne de traitement du signal.

Cette déformation est le résultat d'une transformation différente des harmoniques par le filtre. En effet, rappelons qu'un filtre agit sur une harmonique en agissant sur l'amplitude et la phase :

$$A \cos(\omega t) \xrightarrow{\text{Filtre}} G(\omega) \times A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \phi = \arg \underline{H}$$

Soumettons le filtre à une excitation périodique de période $T = 2\pi/\omega$ et décomposable en série de Fourier :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

En vertu du principe de superposition, chaque harmonique subit une amplification par le gain correspondant à la fréquence de l'harmonique et un déphasage $\phi = \arg \underline{H}$. Le signal de sortie s'écrit alors

$$s(t) = G_0 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [G_n a_n \cos(n\omega t + \phi_n) + G_n b_n \sin(n\omega t + \phi_n)] \quad \heartsuit \quad (5.6)$$

avec $G_n = G(n\omega)$ et $\phi_n = \phi(n\omega)$.

5.2 Filtrage passe-haut

Filtre du premier ordre

Imaginons que l'on souhaite éliminer la composante continue d'un signal périodique. C'est par exemple ce que réalise un oscilloscope sur le signal d'entrée lorsque qu'on le place en mode AC. Un simple filtre passe-haut permet d'éliminer la composante continue⁷. Il faut juste veiller à ce que la fréquence de coupure soit suffisamment basse pour éviter d'affecter les harmoniques du signal.

⁷ : Composante qui correspond à la fréquence nulle.

Le filtre passe-haut le plus simple est un filtre du premier ordre dont la fonction de transfert prend la forme

$$\underline{H} = G_0 \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \quad \heartsuit \quad (5.7)$$

où ω_c est la pulsation de coupure et $|G_0|$ le gain à haute fréquence. On vérifie que $G = 0$ pour $\omega = 0$ et $G \rightarrow |G_0|$ pour $\omega \rightarrow \infty$. Dans un oscilloscope, un filtre passe-haut de gain $G_0 = 1$ et de fréquence de coupure $\nu_c \sim 10$ Hz réalise une telle opération comme l'illustre la simulation de la FIG. 5.7.

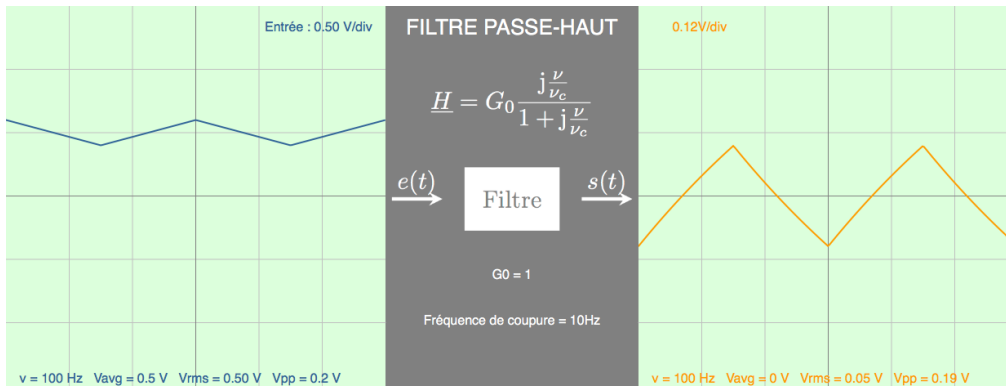


FIG. 5.7 : Élimination de la composante continue d'un signal triangulaire à l'aide d'un filtre passe-haut de fréquence de coupure fixée à 10 Hz (simulation ©J.Roussel).

Établissons le diagramme de Bode d'un tel filtre. Le gain en décibel vaut

$$G_{dB} = 20 \log |G_0| + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}$$

À haute fréquence on a le comportement $G_{dB}^{HF} \simeq 20 \log |G_0|$ alors qu'à basse fréquence on a le comportement $G_{dB}^{BF} \simeq 20 \log |G_0| + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$. Cela donne deux tronçons rectilignes, l'un horizontal et l'autre de pente +20 dB/décade, se coupant au point $(\log(\omega_c); 20 \log |G_0|)$. On vérifie que ω_c est bien la pulsation de coupure puisque

$$G(\omega_c) = \frac{|G_0|}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad G_{dB}(\omega_c) = 20 \log(|G_0|) - 3 \text{ dB}$$

Quant au déphasage introduit par le filtre, si $G_0 > 0$, on a :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + j\omega/\omega_c)$$

ce qui donne les limites suivantes

$$\phi^{BF} \simeq \frac{\pi}{2} \quad \phi(\omega_c) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \phi^{HF} \simeq 0$$

On peut très facilement réaliser un filtre passe-haut à l'aide d'un conducteur ohmique et d'un condensateur ou d'une bobine. En guise d'exercice, on laisse au lecteur le soin de vérifier que les montages de

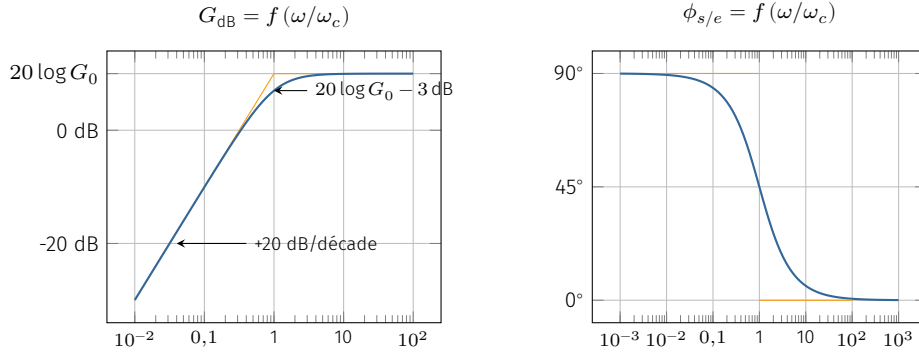


FIG. 5.8 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre avec $G_0 = 3,2$.

la FIG. 5.9 correspondent à des filtres passe-haut de gain $G_0 = 1$ de pulsation de coupure $\omega_c = 1/RC$ pour le montage C-R, et $\omega_c = R/L$ pour le montage L-R.

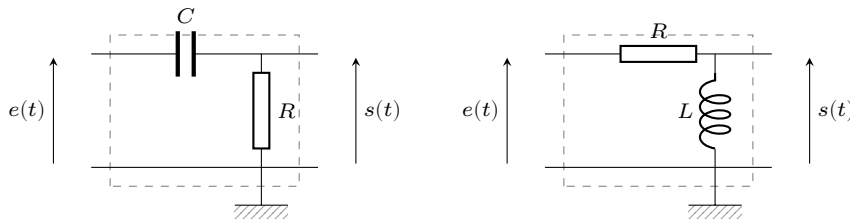


FIG. 5.9 : Exemples de filtres passe-haut du premier ordre.

Comportement dérivateur

Dériver un signal est une opération qui se réalise aisément à l'aide d'un filtre. La tension de sortie doit prendre la forme

$$s(t) = \tau \frac{de(t)}{dt}$$

où τ est un paramètre homogène à un temps. En notation complexe cela donne

$$\underline{s(t)} = \tau j\omega \underline{e(t)} \quad \text{soit} \quad \underline{H} = j\omega \tau$$

Par exemple, si l'on reprend le filtre passe-haut précédent et que l'on règle la fréquence de coupure à une valeur très éloignée de la fréquence du signal d'entrée, on peut écrire $\omega \ll \omega_c$ et

$$\underline{H} = \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \approx j\omega/\omega_c$$

ce qui correspond à une dérivation avec un paramètre $\tau = 1/(\omega_c)$. La FIG. 5.10 illustre le phénomène avec un signal triangulaire d'amplitude 1 V et de fréquence 100 Hz envoyé sur un filtre passe-haut dont la fréquence de coupure est fixée à 1 000 Hz.

Les premières harmoniques – celles qui ont le plus de poids dans la série de Fourier – se trouvent dans un domaine fréquentiel où $\underline{H} \approx j\omega/\omega_c$. On s'attend à obtenir un signal de sortie correspondant

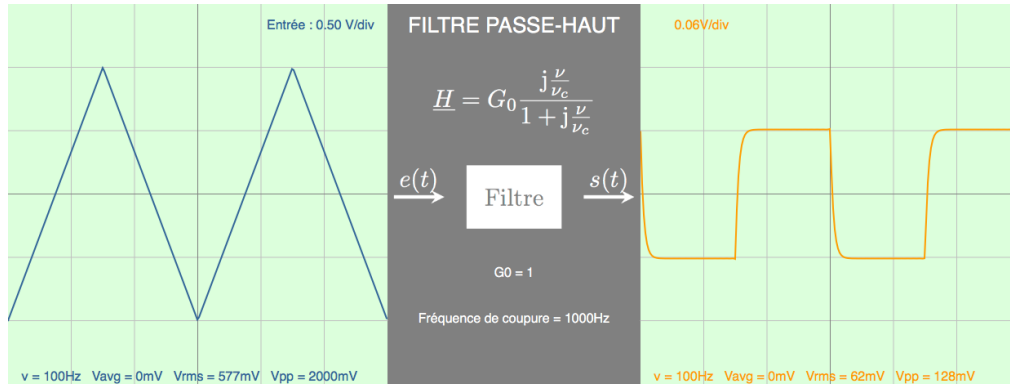


FIG. 5.10 : Dérivation d'un signal triangulaire à l'aide d'un filtre passe-haut de fréquence de coupure fixée à 1000 Hz (simulation ©J.Roussel).

à la dérivée du signal triangulaire, à savoir,

$$s(t) = \frac{1}{2\pi\nu_c} \frac{de(t)}{dt} = \frac{1}{2000\pi} \times \frac{\pm 2}{0,01/2} = \pm 64 \text{ mV}$$

On prévoit donc un signal carré de fréquence 100 Hz et d'amplitude crête à crête 128 mV, ce que confirme la simulation de la FIG. 5.10. On note cependant que le signal de sortie n'est pas tout à fait carré, car le basculement entre la valeur maximale et la valeur minimale se fait sur une durée finie de l'ordre de τ . Du point de vue de l'analyse de Fourier, cet « adoucissement » du signal carré est lié au fait que les harmoniques haute-fréquence se retrouvent dans la bande passante du filtre passe-haut et ne sont pas dérivées ($\underline{H} = 1$ au lieu de $\underline{H} = j\omega\tau$). Or c'est précisément ces harmoniques qui jouent un rôle important dans la synthèse d'un carré au voisinage des discontinuités. En résumé, un filtre passe-haut présente un comportement dérivateur d'autant plus fidèle que la fréquence de coupure est grande.

Filtres plus performants

Les harmoniques situées en dehors de la bande passante sont d'autant mieux filtrées que la pente de la portion rectiligne est importante. Si une atténuation de 20 dB/décade n'est pas suffisante il faut se tourner vers des filtres d'ordre supérieur à un.

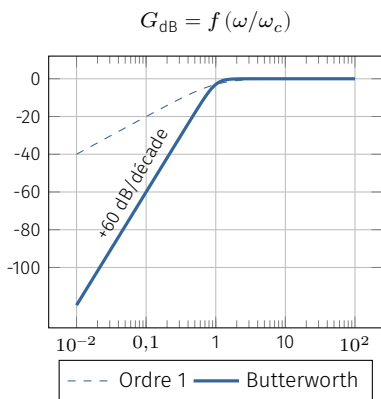


FIG. 5.11 : Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut de Butterworth d'ordre 3.

Le filtre de Butterworth d'ordre trois est couramment utilisé dans les systèmes d'amplification audio. Sa fonction de transfert se met sous la forme

$$\underline{H}(jx) = \frac{(jx)^3}{1 + 2jx - 2x^2 - jx^3} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (5.8)$$

Le gain associé prend une forme simple :

$$G = \frac{x^3}{\sqrt{(1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2}} = \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^6}}$$

On voit ainsi que

$$G^{\max} = 1 \quad G^{\text{HF}} = 1 \quad G(x = 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad G \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} x^3$$

La pulsation de coupure correspond à $x = 1$ soit $\omega = \omega_c$. Par ailleurs, le diagramme de Bode comporte dans la partie basse-fréquence une portion rectiligne de pente +60 dB/décade ($G_{dB}^{BF} = 60 \log x$).

Une manière de réaliser un filtre de Butterworth d'ordre 3 consiste à fabriquer un pont en T avec deux condensateurs et une bobine que l'on branche sur une résistance de charge R (FIG. 5.12). En choisissant correctement les valeurs de C_1 , C_2 et L , on trouve une fonction de transfert de la forme (5.8). Pour le vérifier, calculons la fonction de transfert de ce filtre :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{s}{u_N} \times \frac{u_N}{e}$$

où u_N est la tension entre le point N et la masse. Le premier facteur s'obtient par la relation du diviseur de tension :

$$\frac{s}{u_N} = \frac{R}{R + 1/jC_2\omega} = \frac{jRC_2\omega}{1 + jRC_2\omega}$$

Le deuxième facteur s'obtient à l'aide du théorème de Millman :

$$\frac{u_N}{e} = \frac{e jC_1\omega + 0/(jL\omega) + s jC_2\omega}{jC_1\omega + 1/(jL\omega) + jC_2\omega}$$

À partir de ces deux relations, on peut éliminer u_N . Tout calcul fait, on obtient

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{RC_2C_1L(j\omega)^3}{1 + jRC_2\omega - L(C_1 + C_2)\omega^2 - jRC_1C_2L\omega^3}$$

On constate qu'il s'agit d'un filtre de Butterworth d'ordre 3 à condition d'imposer

$$RC_1C_2L\omega_c^3 = 1 \quad RC_2\omega_c = 2 \quad \text{et} \quad L(C_1 + C_2)\omega_c^2 = 2$$

Dans une chaîne de transmission audio, la résistance R correspond à la résistance d'entrée des hauts-parleurs. Si l'on fixe la fréquence de coupure, alors les valeurs de C_1 , C_2 et L sont imposées.

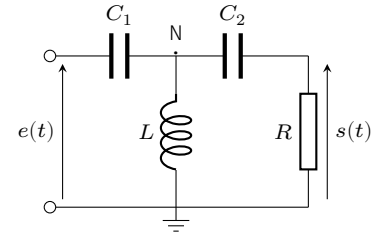


FIG. 5.12 : Exemple de filtre passe-haut du troisième ordre.

5.3 Filtrage passe-bas

Introduction

Il arrive couramment que l'on veuille lisser un signal pour en éliminer le bruit haute-fréquence capturée lors de l'enregistrement. Parfois, on désire simplement calculer la moyenne d'un signal périodique. Souvent dans une chaîne de conversion analyse-numérique on élimine les composantes haute-fréquence pour éviter le phénomène de repliement de spectre. Toutes ces opérations se réalisent à l'aide d'un filtre passe-bas.

Le filtre passe-bas du premier ordre est le plus simple d'entre eux. Sa

fonction de transfert se met sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_c} \quad [\text{passe-bas ordre 1}] \quad \heartsuit \quad (5.9)$$

Le gain associé s'écrit

$$G = \frac{|G_0|}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

On voit ainsi que

$$G^{\max} = |G_0| \quad G^{\text{BF}} = |G_0| \quad G(x = 1) = \frac{|G_0|}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad G \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{|G_0|}{x}$$

Le gain $|G_0|$ est appelé **gain statique**, car il correspond au gain à fréquence nulle. La grandeur ω_c désigne la pulsation de coupure à -3 dB, et le comportement à haute fréquence se traduit dans le diagramme de Bode par une droite de pente -20 dB/décade (cf. Fig. 5.6).

Le filtre RC vu en exemple présente ce comportement avec $G_0 = 1$ et $\omega_c = 1/RC$. On peut aussi réaliser un tel filtre à l'aide d'une bobine et d'un conducteur ohmique; dans ce cas la pulsation de coupure est donnée par $\omega_c = R/L$.

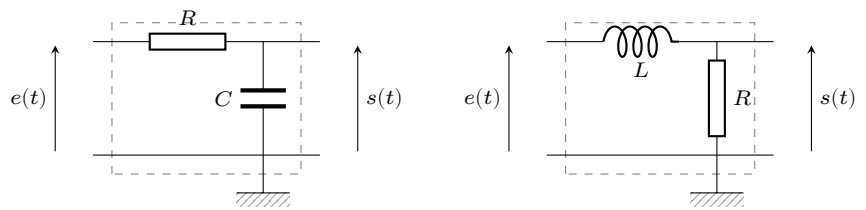


Fig. 5.13 : Exemples de filtres passe-bas du premier ordre.

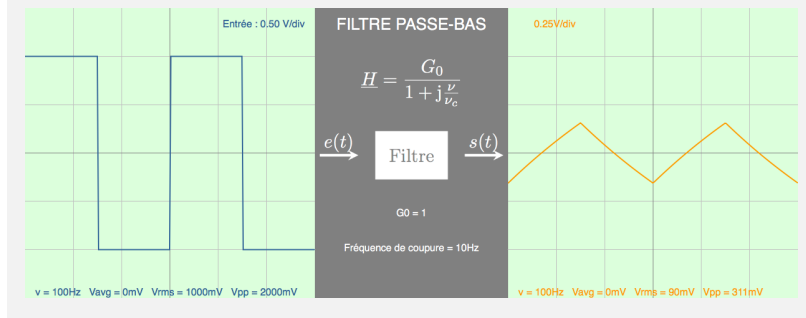
Si l'on cherche à obtenir la valeur moyenne d'un signal périodique, il suffira d'envoyer le signal à traiter sur un filtre passe-bas de gain statique $G_0 = 1$ et dont la bande passante sera choisie de façon à exclure toutes les harmoniques. Ainsi seule la composante continue, c'est-à-dire la valeur moyenne du signal, sera transmise.

Comportement intégrateur

Expérience

Envoyons un signal carré d'amplitude $A = 1\text{ V}$ et de fréquence $\nu = 100\text{ Hz}$ à l'entrée d'un filtre RC. Ajustons la fréquence de coupure à 10 Hz . La simulation ci-dessous donne le résultat⁸ :

8 : Voir [Simuler pour apprendre sur femto-physique.fr](http://Simuler.pour.apprendre.sur.femto-physique.fr)



Comme on peut le voir, le filtre se comporte comme un intégrateur, puisque le signal de sortie est, à une constante multiplicative près, l'intégrale du signal d'entrée.

Pour interpréter cette expérience, adoptons tout d'abord un point de vue temporel. Rappelons [2] que le signal carré est constitué uniquement d'harmoniques impaires dont les amplitudes décroissent en $1/n$. Plus précisément on trouve

$$e(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t) + \frac{1}{7} \cos(7\omega t) + \dots \right]$$

avec $\omega = 2\pi\nu$. Le gain et le déphasage introduits par le filtre s'écrivent :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \text{et} \quad \phi_{s/e} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

avec $\omega_c = 1/(RC)$ la pulsation de coupure ajustable en modifiant les valeurs de R et C . En vertu du principe de superposition, le signal filtré s'écrit

$$s(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\omega}{\omega_c}\right)^2}} \times \frac{1}{n} \cos[n\omega t - \arctan(n\omega/\omega_c)]$$

La fréquence de coupure étant fixée à 10 Hz, toutes les harmoniques se trouvent suffisamment loin de la bande passante pour assimiler la réponse du filtre à son comportement asymptotique. Autrement dit, on a $G \simeq \omega_c/\omega$ et $\phi \simeq -\pi/2$ de sorte que la réponse est approximativement donnée par

$$s(t) = \frac{4A\omega_c}{\pi\omega} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} \sin(n\omega t)$$

On obtient une série d'harmoniques impaires dont l'amplitude décroît en $1/n^2$. On reconnaît ici un signal triangulaire⁹ d'amplitude :

$$A_s = \frac{\pi \omega_c}{2 \omega} A \quad \text{soit} \quad A_s \simeq 157 \text{ mV}$$

résultat confirmée par la simulation¹⁰.

On peut aussi adopter un point de vue spectral. En effet, lorsque $\omega \gg \omega_c$ la fonction de transfert est bien approchée par $\underline{H} \simeq \omega_c/j\omega$. La tension de sortie s'écrit $\underline{e}(t) \simeq \frac{1}{\omega_c} j\omega \underline{s}(t)$ ce qui signifie en représentation réelle $e(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{ds(t)}{dt}$ soit

$$s(t) = 2\pi\nu_c \int e(t) dt$$

Un filtre passe-bas du premier ordre réalise donc une intégration mathématique du signal d'entrée si les harmoniques du signal se trouvent suffisamment loin de la bande passante.

[2] : ROUSSEL (2020), *Séries de Fourier*

9 : Un signal triangulaire d'amplitude A présente des harmoniques de fréquence impaire et d'amplitude $A_n = \frac{8A}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$ [2]

10 : La simulation donne une tension crête-à-crête de 311 mV à comparer avec $2A_s = 314$ mV. La différence est due aux approximations du calcul théorique.

Filtre passe-bas de Butterworth

Un filtre passe-bas est de type Butterworth quand son gain se met sous la forme

$$G = \frac{G_0}{\sqrt{1+x^{2n}}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

où n est l'ordre du filtre.

Ainsi, les filtres RC et LR sont des filtres de Butterworth d'ordre 1. On peut réaliser des filtres de Butterworth d'ordre supérieur en associant « en échelle » des bobines et des condensateurs, l'ensemble étant fermé sur une résistance de charge R . Illustrons l'exemple d'un pont en T similaire au montage de la FIG. 5.12 où l'on remplace les condensateurs par des bobines et vice versa (FIG. 5.14).

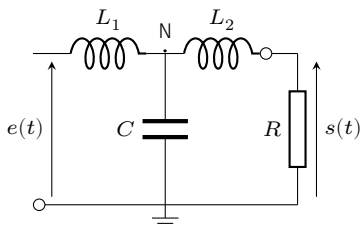


FIG. 5.14 : Filtre passe-bas d'ordre 3.

Calculons la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{\underline{u}_N} \times \frac{\underline{u}_N}{\underline{e}}$$

où \underline{u}_N est la tension entre le point N et la masse. Le premier facteur s'obtient par la relation du diviseur de tension :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{u}_N} = \frac{R}{R + jL_2\omega}$$

Le deuxième facteur s'obtient à l'aide du théorème de Millman :

$$\underline{u}_N = \frac{\underline{e}/jL_1\omega + \underline{s}/jL_2\omega + 0}{1/jL_1\omega + 1/jL_2\omega + jC\omega}$$

En substituant \underline{s} par $\underline{u}_N R / (1 + jL_2\omega)$, on obtient

$$\frac{\underline{u}_N}{\underline{e}} = \frac{R + jL_2\omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega + RL_1C(j\omega)^2 + L_1L_2C(j\omega)^3}$$

Finalement, la fonction de transfert, s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{u}_N} \times \frac{\underline{u}_N}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \frac{L_1+L_2}{R}j\omega + L_1C(j\omega)^2 + \frac{L_1L_2C}{R}(j\omega)^3}$$

11 : Il suffit de choisir $L_2 = R/(2\omega_c)$, $L_1 = 3L_2$ et $C = 2/(L_1\omega_c^2)$.

Pour une résistance de charge donnée et une fréquence de coupure fixée à ω_c , il est possible de choisir correctement les valeurs¹¹ de L_1 , L_2 et C pour mettre la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2(jx) + 2(jx)^2 + (jx)^3} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Dans ce cas, le gain vaut

$$G = \frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^2 + (2x-x^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 3, qui présente une coupure à -60 dB/décade.

5.4 Filtre passe-bande

Introduction

Que l'on cherche à isoler une harmonique particulière cachée dans un signal, ou que l'on souhaite ne conserver qu'une certaine bande de fréquences avant de procéder à une démodulation, on aura recours à un filtre passe-bande.

Le filtre passe-bande le plus simple est un filtre d'ordre deux. Sa fonction de transfert se met sous la forme

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad [\text{Passe-Bande 2nd ordre}] \quad \heartsuit \quad (5.10)$$

où ω_0 est la pulsation de résonance du filtre pour laquelle le gain est maximum ($G_{\max} = |G_0|$). Le paramètre Q est un nombre positif sans dimension, dit **facteur de qualité**, qui permet d'ajuster la bande-passante $\Delta\omega$.

On détermine aisément les comportements asymptotiques du filtre :

$$G^{\text{BF}} \simeq \left| \frac{G_0}{Q\omega_0/\omega} \right| \quad \text{et} \quad G^{\text{HF}} \simeq \left| \frac{G_0}{Q\omega/\omega_0} \right|$$

Ce qui se traduit en échelle logarithmique par

$$G_{\text{dB}}^{\text{BF}} \simeq G_{\text{dB}}^{\text{max}} - 20 \log Q + 20 \log(\omega/\omega_0) \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}^{\text{HF}} \simeq G_{\text{dB}}^{\text{max}} - 20 \log Q - 20 \log(\omega/\omega_0)$$

ce qui donne deux droites de pentes ± 20 dB/décade qui se coupent à la fréquence de résonance à la hauteur $G_{\text{dB}}^{\text{max}} - 20 \log Q$.

Les pulsations de coupure ω_c sont définies par

$$\frac{|G_0|}{\sqrt{1 + Q^2(\omega_c/\omega_0 - \omega_0/\omega_c)^2}} = \frac{|G_0|}{\sqrt{2}}$$

Après avoir posé $x = \omega_c/\omega_0$, on aboutit à l'équation $Q(x - 1/x) = \pm 1$ dont les deux seules solutions positives sont

$$x_{\pm} = \frac{\sqrt{1 + 4Q^2} \pm 1}{2Q} = \frac{\omega_{\pm}}{\omega_0}$$

Finalement, la bande passante vaut

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{ou} \quad \Delta\nu = \frac{\nu_0}{Q} \quad \heartsuit \quad (5.11)$$

Ainsi, plus Q est grand, plus le filtre est sélectif, c'est-à-dire à bande passante-étroite. Q est, de ce fait, aussi appelé **facteur d'acuité à la résonance**.

Quant au déphasage entre la sortie et l'entrée, dès que l'on s'éloigne de la bande passante, on a $\phi \simeq \pm\pi/2$. Les signaux sont en quadrature

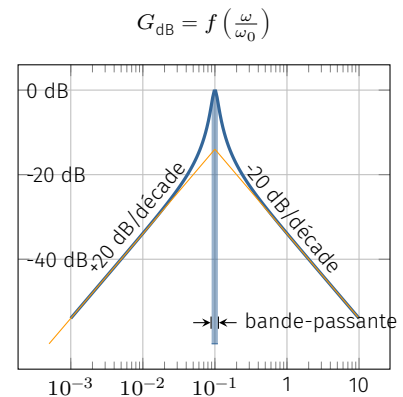


FIG. 5.15 : Diagramme de Bode associé au filtre passe-bande du second ordre pour $Q = 5$ et $G_0 = 1$.

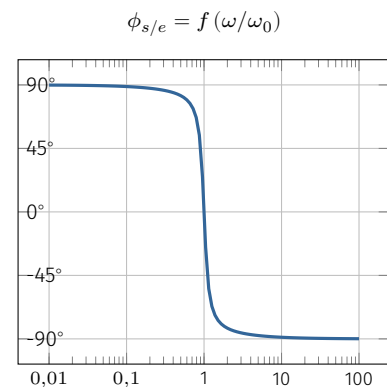


FIG. 5.16 : Déphasage introduit par un filtre passe-bande avec $Q = 5$.

de phase. En revanche à la résonance, le signal de sortie est en phase avec le signal d'entrée.

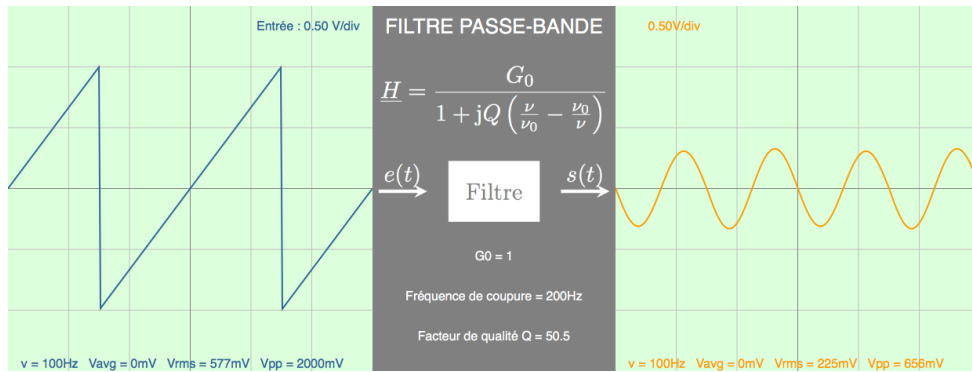


FIG. 5.17 : Sélection de la seconde harmonique d'un signal périodique à l'aide d'un filtre passe-bande (simulation ©J.Roussel).

La simulation de la FIG. 5.17 illustre l'effet d'un filtre passe-bande sur un signal en forme de rampe de fréquence 100 Hz. La bande passante est centrée sur 200 Hz et le facteur Q est fixé à 50 pour avoir une bonne sélectivité. On recueille ainsi en sortie la deuxième harmonique du signal : on peut constater qu'il s'agit d'un sinus déphasé de π .

Filtre RLC

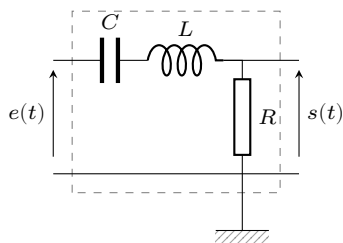


FIG. 5.18 : Quadripôle RLC.

Un dipôle formé d'une bobine en série avec un condensateur et un conducteur ohmique présente les propriétés d'un filtre passe-bande du second ordre. Si l'on recueille la tension aux bornes du conducteur, on obtient un filtre passe-bande du type (5.10). Si l'on recueille la tension aux bornes du condensateur, on obtient un filtre passe-bande à condition que la résistance ne soit pas trop importante.

Intéressons nous d'abord à la tension aux bornes du conducteur ohmique. On a

$$\underline{H} = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs de L et C commandent la fréquence de résonance, tandis que la valeur de R permet d'ajuster l'acuité de la résonance sans modifier la fréquence de résonance.

Si l'on recueille la tension aux bornes du condensateur, on obtient un comportement sensiblement différent. Tout d'abord, la loi des mailles impose

$$\underline{e}(t) = jL\omega \underline{i}(t) + \underline{u}_R(t) + \underline{s}(t)$$

En divisant par $\underline{e}(t)$ on obtient

$$\underline{H}' = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = 1 - \frac{\underline{u}_R(t)}{\underline{e}(t)} - j\frac{L\omega}{R} \frac{\underline{u}_R(t)}{\underline{e}(t)}$$

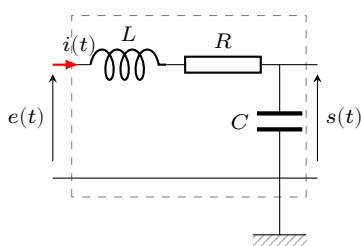


FIG. 5.19 : Quadripôle RLC avec un signal de sortie recueillie aux bornes du condensateur.

Or, le rapport $\underline{u}_R(t)/\underline{e}(t)$ est donné par la relation (5.10). On trouve finalement

$$\underline{H}' = \frac{-jQ\frac{\omega_0}{\omega}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Avec Q et ω_0 définis comme précédemment. Le gain vérifie les propriétés suivantes :

$$G^{\text{BF}} \simeq 1 \quad G(\omega_0) = Q \quad \text{et} \quad G^{\text{HF}} \simeq \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

On remarque que le filtre laisse passer les basses fréquences sans les atténuer. En revanche les hautes fréquences sont plus efficacement atténuées que dans le filtre précédent. Le diagramme de Bode fait apparaître une asymptote oblique de pente -40 dB/décade. Notons également que le signal est amplifié d'un facteur Q lorsque $\omega = \omega_0$. On peut montrer que la courbe de gain ne présente pas toujours de résonance : il faut dépasser la valeur $Q = \sqrt{2}/2$ pour que ce soit le cas. On parlera donc de filtrage passe-bande uniquement si Q est assez grand.

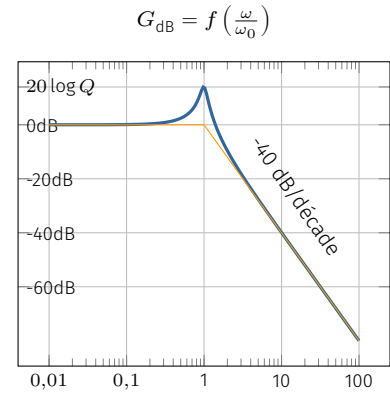


FIG. 5.20 : Diagramme de Bode du filtre RLC avec un signal prélevé aux bornes de C et $Q = 5$.

5.5 Stabilité

Relation différentielle

Rappelons que la réponse d'un filtre peut être modélisée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type

$$\alpha_0 e(t) + \alpha_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + \alpha_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = \beta_0 s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + \beta_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

Cette équation différentielle est étroitement liée à la fonction de transfert du filtre. En effet, si l'on adopte la notation complexe et que l'on se place en régime forcé, on a

$$\frac{de(t)}{dt} \rightarrow j\omega e(t) \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi\nu$$

Dès lors, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\alpha_0 + j\omega\alpha_1 + \dots + (j\omega)^n \alpha_n}{\beta_0 + j\omega\beta_1 + \dots + (j\omega)^m \beta_m} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

avec m l'ordre du filtre et $n \leq m$ pour des raisons de stabilité comme nous allons le voir.

Un théorème de mathématiques stipule que l'on peut toujours décomposer un polynôme à coefficients réels en un produit de polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. C'est pourquoi la fonction de transfert peut toujours s'écrire

$$\underline{H} = \prod \underline{H}_i$$

où \underline{H}_i est une fonction de transfert d'ordre 1 ou 2.

Condition de stabilité

Pour qu'un filtre soit stable, on doit s'assurer qu'à tout signal d'entrée borné corresponde un signal de sortie également bornée, ceci à toute fréquence. Pour cela il est nécessaire que la **fonction de transfert reste finie pour toute pulsation** $\omega \in \mathbb{R}$. Il est donc impératif que le degré du dénominateur soit supérieure ou égal au degré du numérateur, sans quoi $|H|$ diverge quand $\omega \rightarrow \infty$.

Étudions plus spécifiquement les filtres d'ordre 2 de la forme

$$\underline{H} = \frac{\alpha_0 + j\omega\alpha_1 + (j\omega)^2\alpha_2}{\beta_0 + j\omega\beta_1 + (j\omega)^2\beta_2} \quad \text{avec } \beta_2 \neq 0$$

Que dire des coefficients β_1 et β_0 ?

- ▶ si $\beta_1 = 0$, il existe une fréquence qui annule le dénominateur et fait diverger la fonction de transfert.
- ▶ si $\beta_0 = 0$, la fréquence nulle fait diverger la fonction de transfert.

Autrement dit les coefficients β_0 , β_1 et β_2 sont non nuls. Regardons maintenant la dynamique de ce filtre lorsque l'entrée est nulle. L'équation différentielle s'écrit

$$\beta_0 s(t) + \beta_1 \frac{ds(t)}{dt} + \beta_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} = 0$$

12 : Si tel n'est pas le cas, il suffit de multiplier l'équation différentielle par -1 pour se ramener à ce cas.

Supposons que β_2 soit positif¹². Démontrons que β_1 et β_0 ne peuvent pas être négatifs. Rappelons que pour trouver les solutions de l'équation différentielle il faut résoudre l'équation caractéristique

$$\beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 = 0 \quad \text{de discriminant } \Delta = \beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2$$

13 : Rappelons que le produit des racines est donné par β_0/β_2 .

Si $\beta_0 < 0$, le discriminant est positif et les solutions – appelons-les r_1 et r_2 – sont réelles. Or, si $\beta_0 < 0$, le produit¹³ des racines est aussi négatif ce qui signifie que l'une d'entre elles est positive. Par conséquent la solution diverge :

$$s(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \quad (5.12)$$

Le filtre n'est pas stable si $\beta_0 < 0$. Fixons maintenant $\beta_0 > 0$. Le produit des racines est donc positif. Deux cas se présentent.

- ▶ Le discriminant est positif. Les racines sont alors réelles, et la solution s'écrit comme (5.12). Pour que le filtre soit stable il est nécessaire que les racines soient toutes les deux négatives, comme leur somme $S = -\beta_1/\beta_2$. On en déduit $\beta_1 > 0$.
- ▶ Le discriminant est négatif. Les racines s'écrivent $r_{1,2} = -\frac{\beta_1}{2\beta_2} \pm j\Omega$ et la solution est de la forme

$$s(t) = C_1 e^{-\beta_1 t/2\beta_2} \cos(\Omega t + \varphi)$$

solution qui diverge si $\beta_1 < 0$. La stabilité impose alors $\beta_1 > 0$.

Pour résumer, un filtre d'ordre 2 est stable si tous les coefficients du dénominateur sont de même signe. L'étude du filtre d'ordre 1 est analogue et aboutit au même résultat.

Conditions de stabilité

Un filtre d'ordre 1 ou 2 est stable à condition que :

1. le degré du dénominateur soit supérieur ou égal au degré du numérateur;
2. les coefficients du dénominateur soient tous non nuls et de même signe.

Exemple

Considérons l'exemple d'un circuit RLC série où la tension de sortie est recueillie aux bornes de l'ensemble LC. La fonction de transfert vaut

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{1 + LC(j\omega)^2}{1 + RCj\omega + LC(j\omega)^2}$$

Il s'agit donc d'un filtre d'ordre deux. Ici le degré du numérateur est le même que celui du dénominateur, et tous les coefficients du dénominateur sont positifs. Par conséquent ce filtre est stable. On laisse au lecteur le soin de montrer qu'il s'agit ici d'un filtre coupe-bande centrée en $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

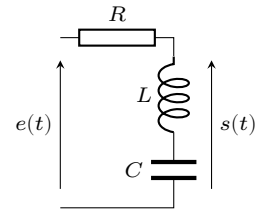


FIG. 5.21 : Filtre réjecteur à l'aide d'un circuit RLC.

L'AMPLIFICATEUR LINÉAIRE INTÉGRÉ

6

L'amplificateur linéaire intégré (ALI), ou amplificateur opérationnel, est un composé actif largement utilisé en électronique analogique.

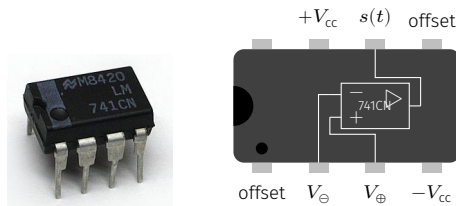
Version en ligne

<https://femto-physique.fr/electrocinetique/ampli-op.php>

6.1 Présentation de l'ALI

Description

L'ALI est un composant couramment utilisé dans les circuits électroniques, car il permet de réaliser de nombreuses opérations de façon performante.



- 6.1 Présentation de l'ALI . . . 65
 - Description 65
 - L'ALI idéal 66
 - Modes de fonctionnement 66
 - Techniques de calcul . . . 67
- 6.2 Montages courants 68
 - Montage suiveur 68
 - Amplificateur inverseur . 69
 - Soustracteur 69
 - Intégrateur 70
 - Dérivateur 71
- 6.3 Filtrage actif 71
 - Filtre passe-bas 71
 - Filtre passe-bande 72
 - Structure de Sallen et Key 73
- 6.4 ALI en régime saturé . . . 75
 - Introduction 75
 - Comparateur simple . . . 76
 - Comparateur à hystérésis 76
 - Oscillateur à relaxation . 77

FIG. 6.1 : Amplificateur Linéaire Intégré 741CN

Il s'agit d'un assemblage complexe de transistors et d'éléments passifs réunis dans un unique boîtier comportant 8 broches.

- ▶ 2 broches reçoivent les potentiels $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$ d'une alimentation continue. Par la suite, nous supposons que $V_{cc} = 15\text{ V}$.
- ▶ 2 broches reçoivent les potentiels d'entrée V_{\oplus} et V_{\ominus} aux entrées dites non-inverseuse et inverseuse. La tension $\varepsilon = V_{\oplus} - V_{\ominus}$ qui règne entre ces bornes est appelée **tension différentielle**.
- ▶ 1 broche donne le potentiel de sortie, noté s .
- ▶ 1 broche est reliée à la masse de l'alimentation et sert de référence de potentiel.

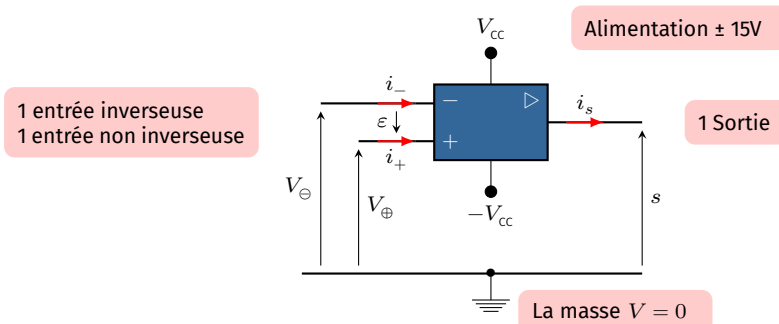


FIG. 6.2 : Schéma de l'ALI. L'alimentation est ici représentée, mais par la suite elle sera omise.

La relation entrée sortie s'écrit en fait

$$s = A_d(V_{\oplus} - V_{\ominus}) + \frac{1}{2}A_{cm}(V_{\oplus} + V_{\ominus})$$

Le taux de réjection en mode commun est le rapport

$$TRMC = 20 \log \left(\frac{A_d}{A_{cm}} \right)$$

Ce dernier est si grand pour un ALI que le terme $\frac{1}{2}A_{cm}(V_{\oplus} + V_{\ominus})$ est négligeable.

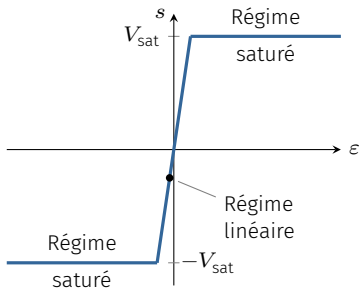


FIG. 6.3 : Caractéristique d'un ALI.

Modèle	TL081	μA741C
Gain A_d	2×10^5	2×10^5
Impédance d'entrée	$2 \text{ M}\Omega$	$1 \times 10^6 \text{ M}\Omega$

TAB. 6.1 : Gain différentiel de quelques ALI.

On représente l'ALI à l'aide du schéma de la FIG. 6.2. Par la suite, on ne fera plus apparaître l'alimentation des ALI dans les montages.

Fondamentalement, l'ALI est un amplificateur de différence présentant un fort taux de réjection en mode commun, dont la caractéristique en boucle ouverte peut être modélisée par

$$s = \begin{cases} A_d(V_{\oplus} - V_{\ominus}) = A_d \varepsilon & \text{tant que } |s| < V_{sat} \\ \pm V_{sat} & \text{sinon} \end{cases}$$

où V_{sat} est la **tension de saturation**. Celle-ci est très proche de V_{cc} , et pour simplifier nous prendrons

$$V_{sat} \simeq V_{cc} = 15 \text{ V}$$

Lorsque $|s| < V_{sat}$, l'ALI fonctionne en régime linéaire car la relation entrée différentielle/sortie est linéaire.

L'ALI idéal

En pratique, le gain différentiel A_d est très grand ($> 10^5$) de sorte que la tension différentielle est très faible en régime linéaire.

Par ailleurs, l'impédance d'entrée est assez grande pour que les courants i_{\ominus} et i_{\oplus} soient négligeables en première approximation. C'est pourquoi, on adopte souvent la version idéalisée suivante :

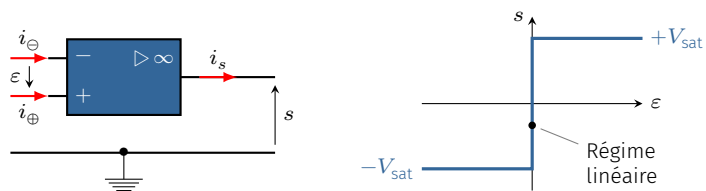
ALI idéal

Un ALI idéal présente :

- ▶ un gain différentiel $A_d = \infty$ de sorte que $\varepsilon = 0 \text{ V}$ en régime linéaire ;
- ▶ une impédance d'entrée infinie ce qui conduit à

$$i_{\ominus} = i_{\oplus} = 0 \text{ A}$$

FIG. 6.4 : À gauche : schéma de l'ALI idéal. À droite : sa caractéristique.



Modes de fonctionnement

En général, l'ALI ne fonctionne pas seul ; il est inséré dans un montage qui prélève une partie de la tension de sortie pour l'injecter sur les entrées différentielles. On parle de *rétroaction*. Selon la rétroaction, l'amplificateur fonctionne en régime linéaire ou en régime saturé.

On admettra la règle suivante :

Régime adopté par un ALI

Si la rétroaction a lieu sur :

- ▶ la seule entrée inverseuse \ominus , alors le régime linéaire est stable;
- ▶ la seule entrée non-inverseuse \oplus , alors le régime saturé est stable ($s = \pm V_{\text{sat}}$);
- ▶ les deux entrées, il faut alors faire une analyse de stabilité pour savoir quel régime adopte l'ALI.

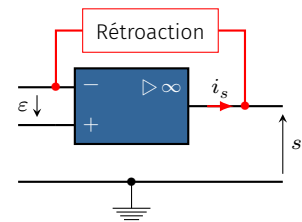


FIG. 6.5 : Rétroaction sur l'entrée inverseuse.

Techniques de calcul

Résoudre un montage avec ALI consiste généralement à déterminer la relation entre la tension de sortie et la(les) tension(s) d'entrée. Pour cela, on peut bien sûr appliquer les lois de Kirchhoff. Pour la loi des mailles, on prendra garde à choisir des parcours qui contournent l'ALI : on ne doit surtout pas « rentrer » dans la boîte noire que représente l'ALI!

Il existe toutefois un théorème qui permet souvent d'obtenir le résultat recherché avec un minimum de calculs : le **théorème de Millman**.

Considérons un nœud N dont on cherche le potentiel sachant que n impédances Z_k ($k = 1 \dots n$) se rejoignent en N. On choisit un potentiel de référence ($V = 0$) et l'on note \underline{V}_k les potentiels (en notation complexe) aux extrémités des impédances.

Théorème de Millman

Si les n potentiels \underline{V}_k et les n impédances \underline{Z}_k sont connus, alors le potentiel en N vaut

$$\underline{V}_N = \frac{\sum_{k=1}^n \underline{V}_k / \underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n 1 / \underline{Z}_k} \quad (6.1)$$

Si une branche ($k = 1$ par exemple) est traversée par un courant d'intensité i_1 connue, on écrira

$$\underline{V}_N = \frac{i_1 + \sum_{k=2}^n \underline{V}_k / \underline{Z}_k}{\sum_{k=1}^n 1 / \underline{Z}_k} \quad (6.2)$$

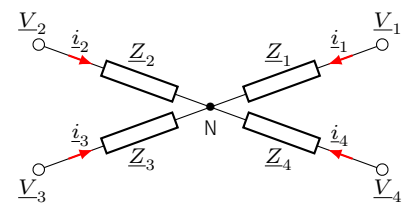


FIG. 6.6 : Le théorème de Millman permet d'exprimer le potentiel du nœud N en fonction des potentiels \underline{V}_k .

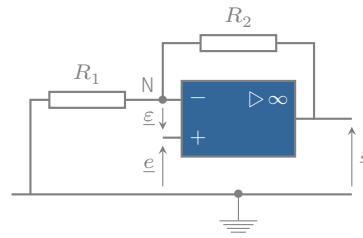
Démonstration

Le théorème de Millman est en réalité une réécriture de la loi des nœuds en termes de potentiels. D'après la loi d'ohm, le courant de la branche k entrant en N a pour intensité

$$i_k = \frac{V_k - V_N}{Z_k}$$

La loi des nœuds $\sum_k i_k = 0$ aboutit au théorème de Millman.

Exercice – Soit le montage ci-dessous contenant un ALI idéal.



Établir la fonction de transfert $H = \underline{s}/\underline{e}$ en appliquant le théorème de Millman en N.

6.2 Montages courants en régime linéaire

Montage suiveur

Le montage suiveur consiste à brancher sur l'entrée non inverseuse une source de tension, et à relier l'entrée inverseuse à la sortie. Cette rétroaction stabilise donc le régime linéaire tant que $|s| < V_{\text{sat}}$. La loi des mailles conduit à

$$e(t) - \varepsilon - s(t) = 0$$

Si l'ALI est idéal, $\varepsilon = 0$ d'où

$$s(t) = e(t) \quad \forall i_s \quad \text{tant que } |s(t)| < V_{\text{sat}} \quad \heartsuit \quad (6.3)$$

Au premier abord, on peut se demander à quoi peut bien servir un tel montage puisqu'il ne modifie pas la tension délivrée par une source. Ce montage a en fait la vertu de ne prélever aucune puissance sur l'entrée, et ainsi de ne pas perturber la source. Il force la source à fonctionner en boucle ouverte; la puissance de sortie est alors fournie par l'alimentation de l'ALI.

Rappelons que toute source réelle présente une impédance interne (impédance de sortie). Lorsqu'on branche une telle source sur une résistance de charge R_c , la tension qu'on recueille vaut,

$$\underline{s}(t) = \frac{R_c}{R_c + \underline{Z}_s} \underline{e}$$

on constate donc que la résistance de charge influence la tension délivrée par la source. En effet, plus la résistance de charge est faible et plus le courant débité est important ce qui diminue la tension délivrée ($\underline{s} = \underline{e} - \underline{Z}_s i$). En revanche si $\underline{Z}_s \rightarrow 0$ alors $\underline{s}(t) = \underline{e}(t)$ quelle que soit la résistance de charge. C'est exactement ce que réalise le montage suiveur!

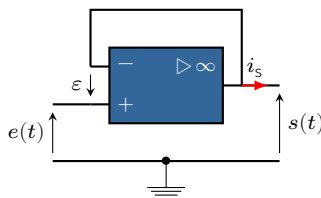


FIG. 6.7 : Montage suiveur.

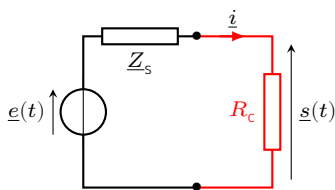


FIG. 6.8 : Source réelle branchée sur une résistance de charge.

En pratique le courant de sortie d'un ALI est limité ($i_{s,\text{max}} \sim 70 \text{ mA}$) de sorte que la tension de sortie ne peut pas dépasser $R_c i_{s,\text{max}}$. Par exemple, si la tension d'entrée vaut 10 V et le courant de sortie est limité à 100 mA, alors la résistance de charge doit être supérieure à 100 Ω.

Amplificateur inverseur

Considérons le montage de la FIG. 6.9 constitué de deux conducteurs ohmiques. Appliquons le théorème de Millman en N. On obtient

$$V_N = \frac{e(t)/R_1 + s(t)/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = -\varepsilon$$

La boucle de rétroaction arrive sur l'entrée inverseuse de sorte que l'ALI fonctionne en régime linéaire. Par conséquent $\varepsilon = 0$ puisque l'ALI est idéal. On aboutit ainsi à

$$s(t) = -\frac{R_2}{R_1} e(t)$$

D'une part le signal est inversé du fait de la présence du signe $-$, d'autre part le signal peut être amplifié si $R_2 > R_1$: on parle de montage amplificateur inverseur.

Intérêt – Ce montage permet par exemple d'amplifier des signaux faibles sur une grande gamme de fréquences.

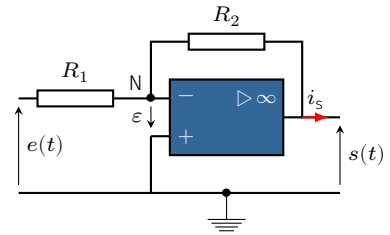


FIG. 6.9 : Montage amplificateur inverseur.

Soustracteur

Considérons le montage ci-dessous où deux signaux sont envoyés sur les entrées inverseuse et non inverseuse de l'ALI. On admettra que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

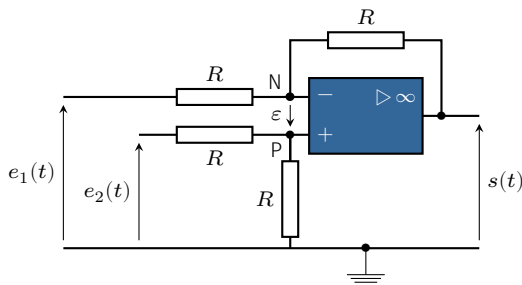


FIG. 6.10 : Montage soustracteur.

Appliquons le théorème de Millman aux nœuds N et P :

$$V_N = \frac{e_1/R + s/R}{1/R + 1/R} \quad \text{et} \quad V_P = \frac{e_2/R + 0/R}{1/R + 1/R}$$

Exprimons le fait que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire :

$$\varepsilon = V_P - V_N = 0 = \frac{e_2}{2} - \frac{e_1 + s}{2}$$

On en déduit

$$s(t) = e_2(t) - e_1(t)$$

Ce montage permet donc de soustraire deux signaux; on l'appelle soustracteur.

Intérêt – Il peut servir à décaler une tension. Par exemple, si un capteur produit une tension comprise entre 15 et 20 V et que l'on désire

ramener la tension entre 0 et 5 V, il suffit d'utiliser un soustracteur pour obtenir $s = e_1 - 15$.

Le montage soustracteur peut également être utile dans les boucles d'asservissement pour comparer une grandeur de commande à la valeur atteinte par le système.

Intégrateur

Branchons un conducteur ohmique sur l'entrée inverseuse et un condensateur entre celle-ci et la sortie. Mettons l'entrée non inverseuse à la masse et envoyons un signal entre le conducteur et la masse. La rétroaction ayant lieu sur l'entrée inverseuse, le régime linéaire est stable. Calculons la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{s}/\underline{e}$ en utilisant le théorème de Millman. On a

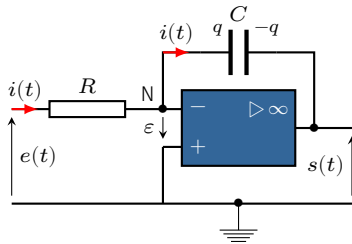


FIG. 6.11 : Montage intégrateur.

$$V_N = \frac{e/R + j\omega Cs}{1/R + jC\omega} = -\underline{\varepsilon}$$

L'ALI étant idéal, on a $\underline{\varepsilon} = 0$ ce qui mène à

$$\underline{e} = -jRC\omega \underline{s} \xrightarrow[\text{temporelle}]{\text{représentation}} e(t) = -RC \frac{ds}{dt}$$

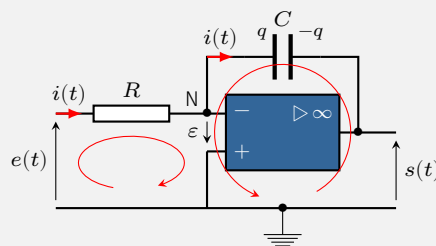
Autrement dit, si l'on intègre la relation :

$$s(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t e(t) dt + s(0)$$

Le signal d'entrée est donc intégré.

Autre démonstration

On peut bien-sûr obtenir la relation entrée/sortie à l'aide de la loi des mailles.



L'additivité des tensions le long des parcours représentés ci-dessus, donne

$$e - Ri + \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad s + \frac{q}{C} + \varepsilon = 0$$

Vu que l'ALI est idéal, on en déduit

$$i = \frac{e}{R} \quad \text{et} \quad q = -Cs$$

La loi des nœuds donne

$$\frac{dq}{dt} = i - i_{\ominus} = i$$

En remplaçant i et q par les expressions précédentes, on aboutit à

$$-C \frac{ds}{dt} = \frac{e}{R} \quad \text{soit} \quad s(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t s(t) dt + s(0)$$

En réalité, ce montage ne fonctionne pas car toutes les composantes du signal sont intégrées. Or, il existe une tension de décalage sur l'entrée différentielle, que l'on néglige habituellement, mais qui induit ici une dérive de la tension de sortie, laquelle finit par saturer. Pour remédier à ce problème, on place une résistance R' en dérivation avec le condensateur.

Dérivateur

À partir du montage intégrateur (FIG. 6.11), intervertissons le condensateur et la résistance, puis procédons de la même manière pour déterminer la relation entrée/sortie en régime harmonique :

$$V_N = \frac{j\omega C \underline{e} + \underline{s}/R}{jC\omega + 1/R} = -\underline{\varepsilon} = 0$$

On en tire la relation simple

$$\underline{s} = -jRC\omega \underline{e} \xrightarrow[\text{temporelle}]{\text{représentation}} s(t) = -RC \frac{de}{dt}$$

Le montage est dit *dérivateur*. Il permet par exemple de transformer un signal triangulaire en un signal carré.

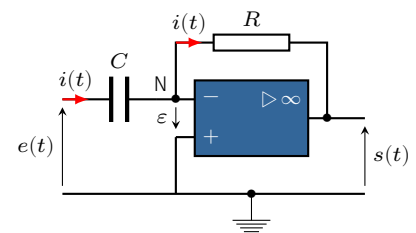


FIG. 6.12 : Montage dérivateur.

6.3 Filtrage actif

Les filtres que nous avons rencontrés jusqu'ici ont un gain en puissance $\mathcal{P}_s/\mathcal{P}_e \leq 1$, car les éléments utilisés sont passifs. Dans ce cas, une partie de l'énergie entrante est dissipée par le quadripôle. Le filtre est dit *actif* quand il contient au moins un composant électronique actif, c'est-à-dire alimenté, tel l'amplificateur linéaire intégré (ALI). Il est, dans ce cas, possible d'avoir un gain de puissance.

On pourrait consacrer un ouvrage entier à l'étude des filtres actifs. Nous nous contenterons de présenter trois exemples.

Filtre passe-bas

Nous cherchons à réaliser un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_0}$$

Si l'on souhaite un gain statique $G_0 > 1$, il faut nécessairement un élément actif dans le montage. Voyons comment, avec un ALI, deux conducteurs, et un condensateur on peut réaliser un tel filtre.

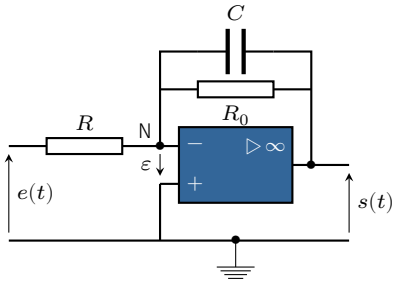


FIG. 6.13 : Filtre passe-bas du premier ordre.

Il suffit de reprendre le montage intégrateur et d'ajouter une résistance. Encore une fois, appliquons le théorème de Millman en N :

$$V_N = \frac{e/R + s(j\omega C + 1/R_0)}{1/R + j\omega C + 1/R_0} = -\varepsilon = 0$$

Il en découle

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{-1/R}{jC\omega + 1/R_0} = \frac{-R_0/R}{1 + jR_0C\omega}$$

ce qui est bien de la forme

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} G_0 = -R_0/R \\ \omega_0 = 1/(R_0C) \end{cases}$$

Ainsi, on peut contrôler le gain statique à l'aide de R et/ou R_0 , et la fréquence de coupure à l'aide de C .

Filtre passe-bande

Brançons un dipôle RC série sur l'entrée inverseuse d'un ALI, puis un dipôle RC parallèle entre l'entrée inverseuse et la sortie. L'entrée non inverseuse est mise à la masse.

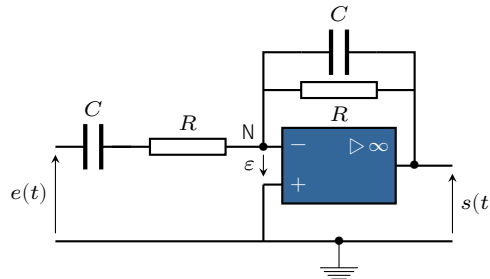


FIG. 6.14 : Filtre passe-bande d'ordre deux.

Notons Z_1 l'impédance du dipôle RC série et Z_2 celle du dipôle RC parallèle. On a

$$Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Z_2 = \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)^{-1} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Appliquons le théorème de Millman en N en utilisant le fait que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire :

$$V_N = 0 = \frac{e/Z_1 + s/Z_2}{1/Z_1 + 1/Z_2} \quad \text{d'où} \quad \frac{s}{e} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

La fonction de transfert se met alors sous la forme

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{-j\omega/\omega_0}{(1 + j\omega/\omega_0)^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande d'ordre deux. En effet, le gain vaut

$$G = |\underline{H}| = \frac{\omega/\omega_0}{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

Il est facile de montrer que le maximum est atteint lorsque $\omega = \omega_0$ (pulsation résonante) pour une valeur $G_{\max} = \frac{1}{2}$.

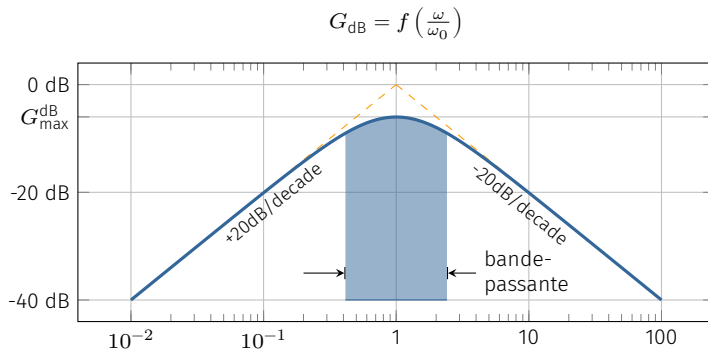


FIG. 6.15 : Diagramme de Bode du montage de la FIG. 6.14.

De plus la bande passante est l'intervalle de fréquences pour lequel

$$G(\omega) > \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ d'où } \omega \in [\omega_0(\sqrt{2} - 1); \omega_0(\sqrt{2} + 1)]$$

La bande passante a pour largeur $\Delta\omega = 2\omega_0$ ce qui conduit à un facteur de qualité fixé à $\frac{1}{2}$. Ici, seule la fréquence de résonance est ajustable.

Structure de Sallen et Key

Présentons maintenant une structure, dite de Sallen et Key, qui permet de réaliser différents types de filtres d'ordre deux (FIG. 6.16) selon la nature des impédances Z_i utilisées.

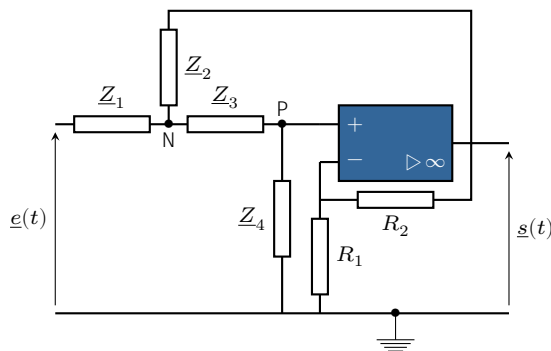


FIG. 6.16 : Structure de Sallen et Key.

Établissons la fonction de transfert en appliquant le théorème de Millman en N et sur les entrées inverseuse et non inverseuse. Commençons par écrire le potentiel V_{\ominus} de l'entrée inverseuse

$$V_{\ominus} = \frac{s/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{s}{K} \text{ avec } K = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Le potentiel de l'entrée non inverseuse, quant à lui vaut

$$V_{\oplus} = \frac{V_N/Z_3}{1/Z_3 + 1/Z_4} = \frac{V_N}{1 + Z_3/Z_4}$$

Enfin, exprimons le potentiel en N :

$$\underline{V}_N = \frac{e/Z_1 + s/Z_2 + \underline{V}_\oplus/Z_3}{1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3}$$

Pour terminer il nous reste à admettre que les rétroactions stabilisent le régime linéaire. Dans ce cas, on a $\underline{V}_\ominus = \underline{V}_\oplus$, ce qui donne :

$$\underline{s} = K\underline{V}_\ominus = K\underline{V}_\oplus = K \frac{\underline{V}_N}{1 + \underline{Z}_3/\underline{Z}_4} = K \frac{e/Z_1 + s/Z_2 + s/(K\underline{Z}_3)}{(1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3)(1 + \underline{Z}_3/\underline{Z}_4)}$$

On en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{K\underline{Z}_2\underline{Z}_4}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_4(1 - K) + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_4}$$

Avec simplement des résistances et des condensateurs on peut réaliser différents types de filtre d'ordre deux qui ont l'avantage d'être compacts et peu coûteux.

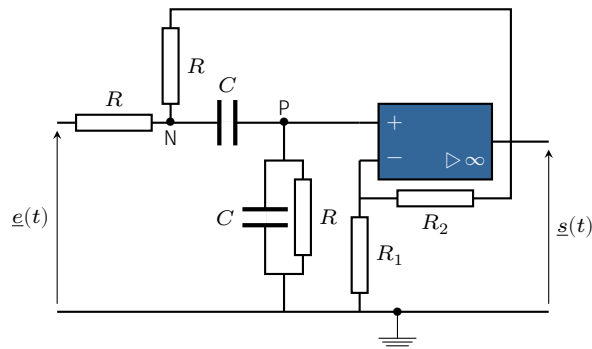


FIG. 6.17 : Filtre passe-bande de Sallen et Key.

Par exemple, si l'on réalise le montage de la FIG. 6.17, on a

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R \quad \underline{Z}_3 = \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_4 = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Sa fonction de transfert se met alors sous la forme

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{et} \quad \begin{cases} G_0 &= K/(5 - K) \\ Q &= \sqrt{2}/(5 - K) \\ \omega_0 &= \sqrt{2}/(RC) \end{cases}$$

On reconnaît la réponse d'un filtre passe-bande d'ordre deux avec une fréquence de résonance liée aux valeurs de R et C . Le gain maximum et le facteur de qualité sont ajustables via le gain $K = 1 + R_2/R_1$. Une valeur proche de 5 permet de réaliser un filtre passe-bande très sélectif¹. Attention toutefois à ne pas dépasser $K = 5$ sans quoi le montage n'est plus stable.

1: Par exemple, la valeur 4,8 donne un facteur de qualité de 7 et un gain à la résonance de 24.

6.4 ALI en régime saturé

Introduction

Jusqu'ici nous nous sommes intéressés aux montages dans lesquels l'ALI fonctionne en régime linéaire. Il existe cependant un autre mode de fonctionnement : le *régime saturé*. Dans ce cas, la tension de sortie ne peut prendre que deux valeurs :

$$s = \begin{cases} V_{\text{sat}} & \text{si } \varepsilon > 0 \quad (\text{saturation haute}) \\ -V_{\text{sat}} & \text{si } \varepsilon < 0 \quad (\text{saturation basse}) \end{cases}$$

La tension de saturation V_{sat} est proche de la tension d'alimentation V_{cc} , et pour simplifier nous prendrons

$$V_{\text{sat}} \simeq V_{\text{cc}} = 15 \text{ V}$$

On admettra les résultats suivants :

Fonctionnement en régime saturé

En général, si les conditions de fonctionnement linéaire ne sont pas réunies, alors l'ALI fonctionne en régime saturé. Cela correspond typiquement à deux cas de figure :

- ▶ L'ALI fonctionne sans boucle de rétroaction. Dans ce cas, il n'y a aucun moyen de stabiliser le régime linéaire.
- ▶ L'ALI est soumis à une rétroaction qui a lieu sur l'entrée non inverseuse.

Si une rétroaction a lieu sur les deux entrées, il faut alors faire une analyse de stabilité pour savoir quel régime adopte l'ALI.

L'ALI étant considéré idéal, les courants d'entrée sont toujours supposés nuls ($i_{\ominus} = i_{\oplus} = 0 \text{ A}$).

Méthode d'analyse – Savoir que l'ALI fonctionne en régime saturé ne permet pas d'en tirer une conclusion sur la tension de sortie. Il faut alors procéder de la manière suivante :

- ▶ On admet que l'ALI est dans un état de saturation, par exemple la saturation haute ($s = +V_{\text{sat}}$), ce qui impose le signe de ε (ici $\varepsilon > 0$). Cette condition se traduit par des contraintes sur les tensions imposées.
- ▶ Tant que ces contraintes sont respectées, l'ALI reste dans l'état de saturation. Lorsqu'elles ne sont plus respectées alors l'ALI bascule dans l'autre état (ici $s = -V_{\text{sat}}$). On reprend alors le raisonnement précédent.

En régime saturé, l'ALI peut servir de comparateur ou de générateurs de fonctions. Voyons quelques exemples en guise d'illustration.

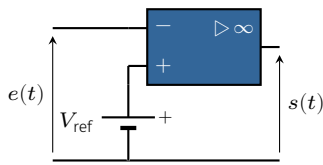


FIG. 6.18 : Comparateur inverseur

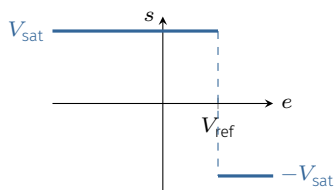


FIG. 6.19 : Caractéristique du comparateur inverseur.

Comparateur simple

C'est un montage qui sert de base à de nombreux autres schémas plus élaborés.

Le principe est simple : on compare un signal d'entrée à une tension de référence, et selon que la valeur du signal est supérieure ou inférieure à la référence, la sortie de l'ALI prend l'une ou l'autre des valeurs V_{sat} ou $-V_{\text{sat}}$.

Il existe deux configurations : le comparateur non inverseur (signal sur l'entrée +) et le comparateur inverseur (signal sur l'entrée -). Dans le premier cas, la sortie vaut V_{sat} quand $e(t) > V_{\text{ref}}$, et $-V_{\text{sat}}$ sinon. Dans le deuxième cas, on a l'inverse.

Le comparateur simple est couramment utilisé dans les dispositifs de détection de niveau.

En pratique, il est préférable de remplacer l'ALI par un comparateur différentiel. Ce dernier, tel un amplificateur à gain élevé doté de deux entrées, est spécifiquement conçu pour fonctionner en mode non linéaire (commutation) à une vitesse nettement supérieure à celle d'un ALI, lequel ne présente pas de caractéristiques exceptionnelles dans ce domaine.

Comparateur à hystérésis

Dans le montage précédent, si la tension d'entrée $e(t)$ fluctue autour du seuil de bascule, la tension de sortie fluctue elle aussi entre les deux saturations, ce qui peut être gênant.

2 : On dit aussi bascule de Schmitt, *Schmitt trigger* en anglais

Le comparateur à hystérésis² résout ce problème. La FIG. 6.20 présente un exemple de montage à hystérésis.

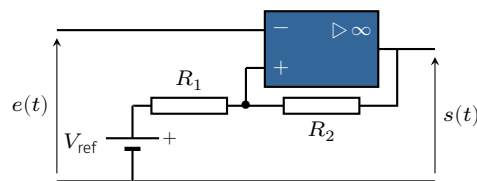


FIG. 6.20 : Comparateur inverseur à hystérésis.

On voit tout d'abord la présence d'une rétroaction qui boucle sur l'entrée non inverseuse. L'ALI fonctionne donc en régime saturé. Exprimons la tension différentielle d'entrée à partir du théorème de Millman :

$$V_{\oplus} = \frac{V_{\text{ref}}/R_1 + s/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \quad \text{et} \quad V_{\ominus} = e$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon = V_{\oplus} - V_{\ominus} = \frac{V_{\text{ref}}}{1 + R_1/R_2} + \frac{s}{1 + R_2/R_1} - e$$

Supposons que la sortie de l'ALI soit dans l'état de saturation haute $s(t) = V_{\text{sat}}$. Il le restera tant que $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire tant que

$$e < \frac{V_{\text{ref}}}{1 + R_1/R_2} + \frac{V_{\text{sat}}}{1 + R_2/R_1} = e_+$$

Lorsque cette condition n'est plus réalisée, l'amplificateur bascule sur la saturation basse $s(t) = -V_{sat}$, et y reste tant que $\varepsilon < 0$, soit tant que

$$e > \frac{V_{ref}}{1 + R_1/R_2} - \frac{V_{sat}}{1 + R_2/R_1} = e_-$$

Ce comportement est résumé par le cycle représenté FIG. 6.21. En fait, tout se passe comme si on avait un comparateur de tension ayant deux seuils de basculement liés aux états de la sortie : quand la sortie est à l'état haut, le seuil de basculement vaut e_+ ; passé ce seuil, la sortie bascule à l'état bas et le seuil prend la valeur e_- . De ce fait, pour faire rebasculer la sortie à l'état haut, il faut que le signal diminue d'une quantité minimale $2\Delta e$, appelé *hystérésis*³ de la bascule. On peut donc caractériser un comparateur à hystérésis par un seuil de basculement (noté e_0) associé à un hystérésis $2\Delta e$; les tensions de basculement étant données par $e_0 \pm \Delta e$. Pour le montage de FIG. 6.20, on a

$$e_0 = \frac{V_{ref}}{1 + R_1/R_2} \quad \text{et} \quad \Delta e = \frac{V_{sat}}{1 + R_2/R_1}$$

En ajustant la valeur de l'hystérésis, on peut réaliser un comparateur peu sensible au bruit (cf. FIG. 6.22).

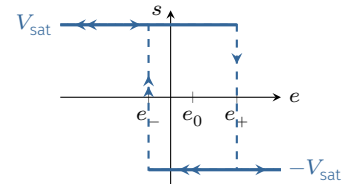


FIG. 6.21 : Cycle d'un comparateur inverseur à hystérésis.

3 : On parle d'hystérésis, car l'état de sortie du comparateur ne dépend pas que du signal d'entrée, mais aussi de son histoire.

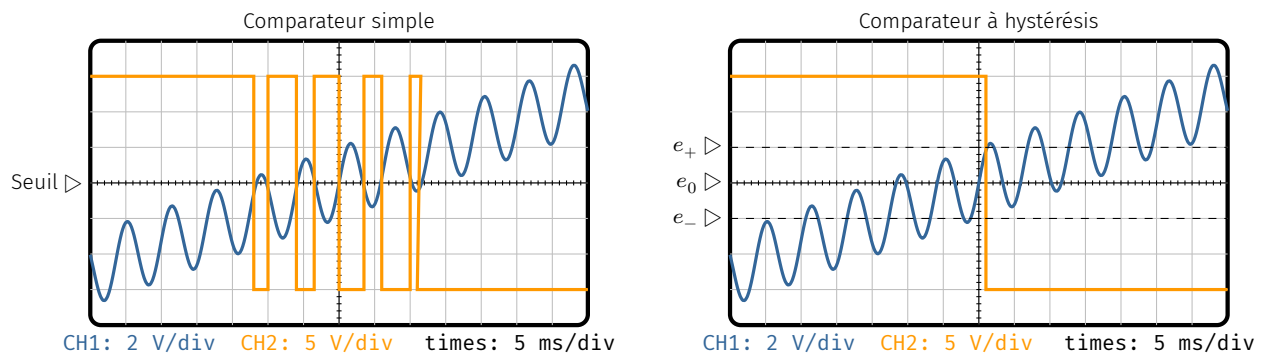


FIG. 6.22 : Comportement vis-à-vis d'un signal de dérive pollué par une fluctuation alternative (en bleu). Le signal de sortie est en orange. Comparaison entre un comparateur simple (à gauche) et un comparateur à hystérésis (à droite). Le seuil est fixé à 0V et l'hystérésis à $\pm 2V$.

Mais la principale application de la bascule de Schmitt est la mise en forme de signaux analogiques pour les appliquer à des circuits logiques qui reposent sur le code binaire (à 2 états).

Oscillateur à relaxation

Un oscillateur à relaxation⁴ est un système qui délivre spontanément un signal alternatif de forme rectangulaire évoluant entre deux états stables. En électronique, on peut réaliser un tel dispositif à l'aide d'un comparateur à hystérésis associé à une cellule RC (cf. FIG. 6.23). Montrons que ce dispositif génère bien un signal rectangulaire dont on peut ajuster la fréquence.

Tout d'abord, une analyse complète montre que le régime linéaire n'est pas stable : l'ALI fonctionne en régime saturé. Commençons par

4 : On dit aussi multivibrateur astable.

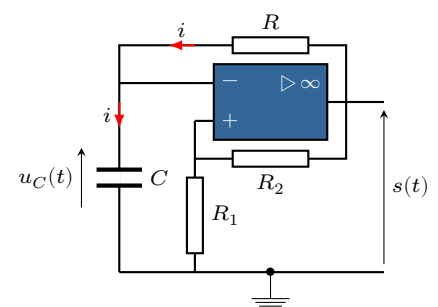


FIG. 6.23 : Oscillateur à relaxation étudié

exprimer la tension différentielle ε en fonction de la tension capacitive u_C et la tension de sortie s :

$$V_{\oplus} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s \quad \text{et} \quad V_{\ominus} = u_C \quad \text{donc} \quad \varepsilon = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s - u_C$$

Supposons que la sortie de l'ALI soit à l'état de saturation haute : $s = +V_{\text{sat}}$. Il y reste tant que $\varepsilon > 0$, soit tant que $u_C < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$. Le même raisonnement permet de dire que l'ALI reste dans l'état de saturation basse tant que $u_C > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$. En résumé,

$$s = \begin{cases} +V_{\text{sat}} & \text{tant que } u_C < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = V_b \\ -V_{\text{sat}} & \text{tant que } u_C > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = -V_b \end{cases}$$

Admettons que le condensateur soit initialement déchargé et que l'ALI soit à l'état de saturation haute. Dans ce cas, le condensateur se charge ($i > 0$) et la tension capacitive augmente. Lorsqu'elle atteint le seuil de basculement V_b , l'ALI bascule en saturation basse et le courant s'inverse : le condensateur se décharge jusqu'à atteindre $-V_b$ après quoi l'ALI bascule à nouveau en saturation haute, etc. Le condensateur subit donc une alternance de charges et décharges.

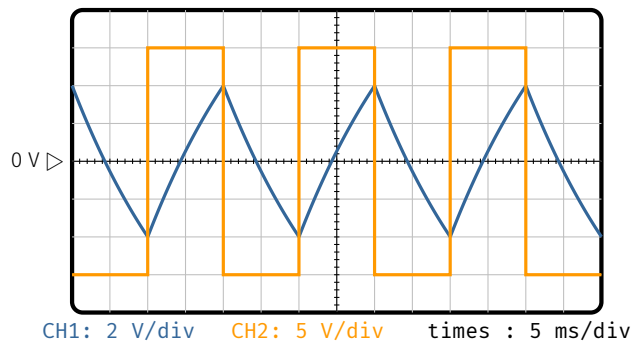


FIG. 6.24 : Evolution de la tension capacitive et de la sortie de l'ALI au cours du temps. Ici le seuil de basculement est ± 4 V et la période $T = 20$ ms (c'est-à-dire $\tau = 18,3$ ms et $R_2/R_1 = 2,75$).

Calculons la durée Δt d'une décharge. Fixons l'origine des temps au moment où la tension capacitive est maximale $u_C = V_b$. Lors de la décharge, la tension capacitive vérifie les relations

$$s(t) - Ri - u_C = 0 \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad s = -V_{\text{sat}}$$

D'où l'équation différentielle

$$u_C + \tau \frac{du_C}{dt} = -V_{\text{sat}} \quad \text{avec} \quad \tau = RC \quad \text{et} \quad u_C(t=0) = V_b$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la solution s'écrit

$$u_C(t) = (V_b + V_{\text{sat}}) e^{(-t/\tau)} - V_{\text{sat}}$$

Le temps que met la tension à atteindre l'autre seuil ($u_C(\Delta t) = -V_b$) vaut $\Delta t = \tau \ln \left(\frac{V_{\text{sat}} + V_b}{V_{\text{sat}} - V_b} \right)$.

On vérifie de la même manière que la recharge du condensateur pré-

sente la même durée, de sorte que la période du phénomène vaut

$$T = 2\Delta t = 2RC \ln \left(\frac{V_{\text{sat}} + V_{\text{b}}}{V_{\text{sat}} - V_{\text{b}}} \right) = 2RC \ln \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} \right)$$

En sortie on observe un signal carré d'amplitude crête-à-crête $2V_{\text{sat}}$ et de période T réglable à l'aide des composants R , C , R_1 et R_2 .

En pratique de tels montages servent dans certains générateurs de signaux. Leur principal défaut réside dans la faible stabilité de la fréquence d'oscillation. C'est pourquoi on leur préfère souvent les oscillateurs à quartz.

Pour en savoir plus

- [1] J. ROUSSEL. *Conducteurs électriques*. [En ligne]. Fév. 2016. URL : <https://femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs-electriques.php> (cf. p. 4, 17).
- [2] J. ROUSSEL. *Séries de Fourier*. [En ligne]. Jan. 2020. URL : <https://femto-physique.fr/omp/serie-de-fourier.php> (cf. p. 57).
- [3] Jean PÉRICART. *Cours d'électricité théorique, Tome 1 : Electrostatique - Electrocinétique*. 1962.
- [4] Étienne TISSERAND, Jean-François PAUTEX et Patrick SCHWEITZER. *Analyse et traitement des signaux-2e éd. : Méthodes et applications au son et à l'image*. Dunod, 2009.
- [5] Roger DUFFAIT et Jean-Pierre LIÈVRE. *Expériences d'électronique à l'agregation de sciences physiques*. Bréal, 1999.
- [6] B. DELACRESSONNIERE et C. MORE. *Électronique : 1re année*. Tec & Doc, 1995.
- [7] J. NEVEU. *L'amplificateur linéaire intégré*. [En ligne]. URL : <https://jeremy.neveu.pages.in2p3.fr/Electronique/AOP.html>.



2026