Mpsi1 2013/2014

Formation disciplinaire du premier semestre : Signaux physiques

Chapitre 1 : Qu'est ce que la physique ?

I : Qu'est ce que la physique ?

1-1 Lois, théories et paradigmes.

Qu'est ce que la physique ? Cette question, qui ne se l'est posée à son premier cours de physique ? Le plus souvent avec un mélange d'inquiétude mais aussi de curiosité face à une nouvelle discipline.

Notre génération commençait la physique en classe de seconde. J'ai souvenir d'un premier cours où l'on m'expliquait très doctement comment convertir des litres en mètres cubes, ou encore comment choisir le nombre de chiffres significatifs d'un résultat. Mon Dieu que cela avait l'air ennuyeux la physique ! Moi qui pensais qu'on m'expliquerait la couleur du ciel, l'arc en ciel, les mouvements de la Terre …

Point de tout cela, convertissez-moi 2, 01 mètre cubes en Litres …. !

Très souvent des amis non scientifiques ont un souvenir douloureux de leur cours de physique. Il ne leur reste en mémoire qu'une vague loi d'Ohm dont on ne sait pas très bien à quoi elle peut servir, des histoires de conventions incompréhensibles et puis à peu prés rien. Et pourtant, ces mêmes amis achètent des revues scientifiques, se passionnent pour les émissions de vulgarisation scientifique et ne manquent pas de culture scientifique acquise en autodidacte. Il ne s'agit pas d'être démagogue et prétendre qu'on puisse faire aujourd'hui de la physique sans mathématiques ou sans ces choses ennuyeuses apprises. ***Les mathématiques sont la langue des sciences depuis le XIX ème siècle*** et sont aussi ***un outil puissant*** pour la formalisation de la physique. Toutefois, résumer la physique à des mathématiques est tout aussi réducteur. Et comme nous allons le voir même une équation, aussi « barbare » soit elle , contient de la physique cachée. Cachée justement par cette formalisation excessive.

Les mathématiques ont donc en physique ce double profil contradictoire : l'équation simplifie à outrance le phénomène sous la forme de lois mais elle noie dans le même temps le concept même à l'origine de ces lois. En ce sens on peut être un très bon mathématicien et un piètre physicien. Cette formalisation excessive n'est sans doute pas le seul travers de notre enseignement. Ce dernier souffre aussi, sans aucun doute faute de temps nécessaire, de ces deux piliers formateurs que sont *l'Histoire de la physique* et la *confrontation des idées même fausses* de la science. On a hélas oublié que la physique antique était partie intégrante de la philosophie. Cette philosophie qui s'intéressait à la nature en plus de l'individu et de la cité. Discipline philosophique, la science est donc avant tout une suite de système de pensées qui se sont construits, opposés quelquefois brutalement, ou ont disparu au cours de l'histoire des sciences.

> Que reste-t-il de la mécanique Aristotélicienne ? Cette mécanique qui attribue à tout corps matériel un impetus qu'il consomme au fur et à mesure de son mouvement de sorte que soumis à aucune force un corps devrait rester immobile ? Rien ou presque rien dans notre enseignement.

Que reste-t-il de l'école des énergétistes qui raillaient la vision statistique et microscopique de la thermodynamique de Boltzmann ?

Que reste –t-il encore du phlogistique, quantité de chaleur contenue dans les corps ? Là aussi, rien ou presque dans notre enseignement.

Tout cela a été oublié et pourtant, qui n'a jamais eu un élève penser que la force est toujours colinéaire au mouvement, attribuer une accélération nulle à un mouvement circulaire uniforme, faisant en cela la même erreur qu'Aristote. Qui n'a jamais entendu un de ces élèves expliquer que dans le lancer d'un objet dans le champ de pesanteur, celui-ci est d'abord freiné quand il monte, atteint son sommet puis est accéléré quand il redescend ! Sauf que lors de son mouvement, son accélération demeure tragiquement constante, ce qui n'est ni intuitif, ni simple à comprendre.

Il nous arrive aussi d'oublier le sens des mots dans l'enseignement. Qui n'a jamais dit à ces élèves que le plafond d'une montgolfière est atteint quand la force est nulle en opposition complète avec le principe d'inertie !

Qui n'a jamais entendu parler de chaleur dégagée ou de « pertes « d'énergie et en général juste après un cours sur la conservation de l'énergie, d'air chaud qui monte parce qu'il est plus léger que l'air froid ? L'air chaud aurait-il une masse molaire différente de l'air froid ?

Les lois physiques sont souvent données comme cela, brutes, hors de leur contexte historique, de la longue réflexion qui les a mises en forme et souvent sans la rigueur sémantique qu'il convient.

Un ancien ministre de l'éducation nationale regrettait à juste titre que des étudiants ayant fait des heures de mécanique ne savaient pas que deux corps de masse distincte mettaient la même durée lâchés d'un point sans vitesse pour atteindre le sol dans le vide ! Le fondement même de la mécanique Galiléenne n'était donc pas acquis par une majorité d'élèves.

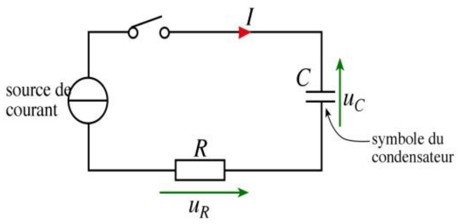
D'où l'importance de la confrontation des idées en sciences ce qui suppose une grande précision dans le vocabulaire et dans le choix des mots de notre enseignement.

1 2 . Mots et maux de la physique.

Cette phrase de Levy Leblond , nous la pratiquons tous en tant que pédagogue. Je prendrai deux ou trois exemples illustratifs simples des difficultés de compréhension que peuvent induire chez nos élèves un choix de mots maladroits.

Une des lois simples de la physique est ***la loi des nœuds*** qui dit qu' a un embranchement d'un circuit le courant qui entre est égale à la somme des courants qui sortent de l'embranchement , ce qui traduit ni plus ni moins que la conservation de la charge en régime permanent. Malheureusement, on voit encore trainer en exercices des questions du type « quel est le courant consommé par le dipôle » sauf que d'après cette même loi des nœuds, le courant qui entre dans le dipôle est celui qui sort de sorte qu'un dipôle ne consomme aucun courant. Il aurait donc fallu écrire dans cet exercice « quel est le courant qui traverse le dipôle ?

Un autre exemple ? ***La fameuse charge du condensateur !*** On demande souvent à des élèves en exercice de calculer la charge d'un condensateur. Certes mais, comme un condensateur comme nous le savons est formée de deux plaques en influence totale de sorte que la charge du condensateur vaut toujours +Q (armature 1)+(-Q) (armature 2)soit 0. Un condensateur ne se charge pas, ni ne se décharge ; ce sont ces ***armatures*** qui se chargent. Cela ne semble pas très grave du point de vue sémantique et pourtant cela induit chez certains de nos élèves et même en CPGE l'idée que des charges sont stockées entre les deux armatures ! C'est la fameuse charge du condensateur ! Quant à la décharge du condensateur, elle fait penser que cela se fait toujours vers zéro sauf que la tension aux bornes d'un condensateur qui diminue ne correspond pas forcément à une décharge des armatures mais souvent à transfert de charges d'une armature vers l'autre.



Les exemples abondent de **mots mal choisis** qui aboutissent à des incompréhensions fondamentales chez nos élèves. Ainsi lit-on dans des exercices d'optique physique, des phrases du type **« les deux rayons interfèrent »** sauf que les rayons sont réservés à l'OG dont l'un des fondements est l'indépendance des rayons, et ce sont deux ondes qui interfèrent. On lit aussi dans encore dans des corrigés d'exercice l'idée selon laquelle, des lentilles n'introduisent pas de différence de marche ce qui est complètement faux. Il faudrait dire : en considérant les surfaces d'onde par Malus la différence de marche entre deux ondes traversant une lentille correspond à telle ou telle longueur géométrique ».

Ne parlons pas de la loi de Lenz énoncé souvent ainsi **« l'effet de l'induction s'oppose à la cause qui l'a créé », phrase** en elle-même **absurde** puisqu'en français **l'effet est le résultat de la cause**. Il faudrait dire simplement que l'induction s'oppose aux variations de flux dans le circuit ce qui serait en revanche tout à fait exact.

Des expériences illustratives ont quelquefois des interprétations complètement fantaisistes. Une des plus connus, consiste à placer en parallèle deux lampes identiques, l'une seule, l'autre avec une bobine. On ferme l'interrupteur et l'on voit la lampe en série avec la bobine s'allumer en dernier. Interprétation : ***la bobine retarde le courant*** qui en revanche n'est pas retardé dans l'autre lampe. Las ! Dans les deux ampoules le courant est retardé et ce, avec la même constante de temps, rigoureusement la même. Si la lampe en série avec la self ne s'allume pas, c'est parce que ***la self assure la CONTINUITE du courant*** et non qu'elle le retarde. Le courant suit des lois exponentielles dans les deux cas. L'explication est sémantiquement très dangereuse.

II : La physique : science de la nature.

Science de la nature, voilà l'étymologie même de la physique La physique est donc la science de la nature. Bien entendu, la mécanique et en particulier la mécanique céleste ont eu un poids important dans cette « philosophie » de la nature.

La physique, c'est donc d'abord *l'observation de la nature et des objets de la nature en interaction*. Elle tente de trouver dans la complexité de cette nature des lois simples pour en expliquer partiellement le fonctionnement. Aussi complexe que puissent être certains phénomènes, se trouvent derrière un nombre restreint de lois écrites à partir de Newton dans la langue des mathématiques.

Toute loi fait elle-même partie d'un système de pensée appelée ***Théorie*** fondée sur un certain nombre de postulats et qui demeure, n'en doutons pas dans tous les cas une vision « anthropique » du monde.

En effet, ***Il n’y a pas de vérité scientifique ou de théorie juste ou fausse en physique***, comme on le croit souvent. Toute théorie est et demeure en physique une construction intellectuelle dont l’esthétisme est aussi important que les explications qu’elle donne. L’invention des lignes de force, d’objets physique tels que la couleur, la saveur en physique nucléaire ont autant d’importance dans la compréhension que la nature elle-même.

En particulier, si la physique est souvent vue comme une science expérimentale, combien d’idées naïves traînent encore dans la tête de nos étudiants ?

Une expérience ne prouve en aucun cas qu’une théorie soit juste ou fausse. Cela d’ailleurs a-t-il un sens ?

Un certain nombre d’expériences sont en accord avec une théorie jusqu’à ce qu’un jour cette théorie ou « paradigme » selon Kuhn se révèle soit insuffisante pour expliquer certains phénomènes, soit en contradiction avec une expérience, soit en opposition avec une autre branche de la physique.

Ainsi cette admirable construction qu’est la mécanique classique est insuffisante pour expliquer le mouvement d’objets à des vitesses proches de la vitesse de la lumière. Le nouveau paradigme , la physique relativiste n’est ni plus juste , ni plus fausse que la physique classique qui peut selon deux points de vue opposés mais non contradictoires , soit être considérée comme une approximation de la relativité restreinte aux vitesses faibles devant la vitesse de la lumière, soit être tout simplement une nouvelle théorie où les concepts de temps et d’espace sont revisités de fond en comble et qui n’a plus grand-chose à voir avec la physique classique.

Pour autant, moult phénomènes peuvent être expliqués et avec une excellente précision avec la physique classique.

Chapitre 2: Maths pour la physique.

I : Les grandeurs de la physique.

On peut classer les grandeurs physiques en ***trois catégories***, les grandeurs temps et espace, les grandeurs dimensionnées, et enfin les grandeurs adimensionnées.

Dans la première catégorie, nous incluons les grandeurs physiques *position et temps*. Ces deux paramètres presque intuitifs sont pourtant parmi les plus difficiles à définir proprement en physique. Ce sont d'ailleurs un certain nombre de postulats sur l'espace et le temps qui fondent les théories de la physique. Soyons honnête ! Nos définitions intuitives de ces deux grandeurs physiques dans nos cours soulèvent un grand nombre de questions que la physique ne tranche pas. Si l'on peut « palper » la notion d'espace (combien de km ai-je parcouru ? Quelle est la taille de cette montagne ?), on est loin de définir proprement le temps. A l'instant où je parle le passé n'est plus car il est mort. Quant à l'avenir, il nous est inconnu :

Ces deux temps-là donc, le passé et le futur, comment "sont"-ils, puisque s'il s'agit du passé il n'est plus, s'il s'agit du futur il n'est pas encore ? Quant au présent, s'il était toujours présent, et ne s'en allait pas dans le passé, il ne serait plus le temps mais l'éternité… Nous ne pouvons dire en toute vérité que le temps est, sinon parce qu'il tend à ne pas être. » (XI, 14, 17)Saint Augustin.

De fait, nous disons à nos élèves que le temps s'écoule imperceptiblement et toujours dans le même sens (c'est l'irréversibilité !) et qu'une durée peut être mesurée par un phénomène périodique : battement d'un pendule, rotation propre de la Terre, révolution de la Terre autour du soleil, transition électronique.

Tout physicien cherchera pour un phénomène irréversible la recherche d'un temps typique appelé temps caractéristique ou ***constante de temps*** du phénomène. Ce temps typique est l'unité naturelle du phénomène qui n'est pas en général la seconde mais qui dépend des paramètres pertinents du problème.

Ainsi nous savons que la constante de temps d'un circuit R-C est le produit RC. Il faut donc éviter de dire que l'armature du condensateur est chargée au bout d'un temps très long mais il faut dire qu'on a la charge finale à 1% près au bout de 5 RC. L'étalon de temps est ici RC et non la seconde.

De manière générale, ***une grandeur dimensionnée n'est jamais en physique, ni grande ni petite***. Un atome n'est pas petit en soit, et la Terre n'est elle non plus, pas grande en elle-même .En revanche il est tout à fait juste de dire que la taille d'un atome est très petite devant le rayon de la Terre. Et pourtant, l'on voit bien que ces deux éléments de comparaison semblent curieux et un peu tirés par les cheveux. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

Après les grandeurs temps et espace, venons en aux grandeurs dimensionnées autre que le temps et l'espace. Ce peut être par exemple des combinaisons de ces deux dernières, vitesse, accélération, grandeurs fondamentales de la cinématique. Deux autres grandeurs physiques vont intervenir de manière fondamentale : la charge et la masse cette dernière proportionnelle elle-même à la quantité de matière. En fait sept grandeurs physiques fondamentales sont nécessaires pour construire toutes les grandeurs de la physique : longueur, masse, temps, charge, énergie, température et quantité de matière.

I I: Les outils mathématiques de la physique.

Les outils mathématiques utilisés en CPGE sont contrairement à ce que l'on pense relativement restreints. La physique de classes préparatoires étant pour **l'essentiel une physique linéaire.**

En pratique, nous rencontrerons des ***grandeurs physiques discrètes***, qui sont des grandeurs indicées par un entier n. Ce peut être par exemple la tension V_n au nœud numéro n (n entier) de n cellules électriques, ou encore la hauteur y_n d'un rayon lumineux par rapport à l'axe optique au niveau des centres optiques d'une suite de lentilles.

Nous rencontrerons aussi des ***grandeurs non discrètes ou continues*** qui sont en pratique et en physique des fonctions d'une ou plusieurs variables.

Nous nous restreindrons aux grandeurs fonctions du temps ou de l'espace, par exemple ce pourra être un courant $i(t)$ à une date t ou la température $T(z)$à la côte z.

II-1 : Les outils de la physique pour des grandeurs physiques discrètes.

II- -1-1: Suites en physique :

a) Suite arithmétique :

Une suite arithmétique est une suite du type : $\begin{cases} \boldsymbol{y_{n+1} = y_n + a} \\ \boldsymbol{y_1 = b} \end{cases}$ où a et b sont deux constantes connues. a est appelé raison de la suite.

Il est évident que $\boldsymbol{y_n = y_1 + (n-1)a}$

Essayer avec n=1 pour vérifier l'indexation ! Cette suite est donc toujours **divergente.**

b) Suite géométrique :

Une suite géométrique est une suite du type : $\begin{cases} \boldsymbol{y_{n+1} = q y_n} \\ \boldsymbol{y_1 = b} \end{cases}$ où q et b sont deux constantes connues. Nous exclurons le cas q=1 qui correspond à une suite constante.

Nous aurons dans ce cas : $\boldsymbol{y_n = \ y_1 . q^{n-1}}$

Là aussi, essayer avec n=1 pour éviter les erreurs d'indexation

.Cette suite **converge si** $\boldsymbol{|q| < 1}$

Calculons la somme des termes d'une telle suite c'est-à-dire :

$\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i = y_1 + y_2 + \cdots y_n}$

On a : $S_{n+1} = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + y_{n+1}$ et $qS_n = y_2 + y_3 + \cdots + y_n + y_{n+1} = S_n - y_1 + b.q^n$

On a donc in fine : $(1-q)S_n = y_1(1-q^n)$ soit : $\boldsymbol{S_n = y_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$

c) Suite arithmético-géométrique :

Il s'agit d'une suite du type : $\begin{cases} \mathbf{y_{n+1} = qy_n + a} \\ \mathbf{y_1 = b} \end{cases}$.

On suppose q≠1 , ce qui correspondrait à la suite arithmétique.

On peut relarquer qu'il existe une valeur $y_1 = l$, telle que la suite est constante cela correspond donc forcément à $l = ql + a \text{ soit } l = \frac{a}{1-q}$

Considérons alors la suite $u_n = y_n - l$, on a alors $u_{n+1} = qy_n + a - ql - a = qu_n$.

On reconnaît donc une suite géométrique de sorte que $\boldsymbol{y_n = (b-l).q^{n-1} + l}$

d) Suite doublement récurrente :

Il s'agit d'une suite du type : $\begin{cases} \boldsymbol{ay_{n+1} + by_n + cy_{n-1} = 0} \\ \boldsymbol{y_1 = \alpha} \\ \boldsymbol{y_2 = \beta} \end{cases}$

Où b et c sont deux coefficients réels connus et α, β *donnés*.

Cherchons une solution du type : $y_n = \lambda r^n$ ou λ est une constante non nulle.

En injectant ceci dans la suite, il vient : $\lambda r^n(r^2 + br + c) = 0$

L'équation : $ar^2 + br + c$ est appelée ***équation caractéristique de la suite***.

Si $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$, on a deux racines réelles $r_1$et r_2, et les termes de la suite d'écrivent alors, compte tenu de la linéarité :

$$\boldsymbol{y_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n}$$

Si $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$, on a deux racines complexes conjuguées $r_1$et $r_2$et les termes de la suite sont du même type.

Si $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$, on a une racine double $r_1 = r_2$ et l'on admettra alors que :

$$y_n = r_1^n(\lambda + \mu n)$$

Les deux constantes $\lambda \text{ et } \mu$ sont déterminées par les deux premiers termes de la suite.

II-1-2 : Les outils de la physique pour des grandeurs physiques continues .

Les grandeurs physiques que nous étudierons seront au moins continues et dérivables sur leur intervalle de définition. Appelons $f(t)$ la grandeur physique étudiée, où t est la variable temps.

La dérivée $f'(t) = lim_{h\to 0}\left[\frac{f(t+h)-f(t)}{t+h-t}\right] = \frac{df}{dt}$. C'est donc le rapport entre le taux d'accroissement de la fonction et celui de la variable au voisinage d'un point.

On notera donc en physique : $df = f'(t)dt$ ce que nous interprétons physiquement de la manière suivante : une petite variation de f autour d'une valeur donnée t est égale à la dérivée de f en cette valeur que multiplie une petite variation de t. Par exemple, si une dérivée vaut 3 en un point donné t=2 , cela veut dire que la fonction autour de ce point t=2 , varie 3 fois plus vite que la variable.

II-1-2-1 : Système linéaire du premier ordre à coefficients constants.

a) ***Définition***

N.B / On pourra charger l'application TouchPlot sur I-Phone pour visualiser des solutions d'équations différentielles du premier ordre.

Une grandeur physique $f(t)$ obéit à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant si l'on peut écrire sous forme standard:

$$\boldsymbol{\tau\frac{df}{dt} + f(t) = g(t)}$$

Avec $\boldsymbol{f(0^+)}$ connue (condition initiale) et $\boldsymbol{t \geq 0}$.

$\boldsymbol{g(t)}$ est une fonction **connue** que nous appellerons **excitation** du système. La solution f(t) sera appelé la **réponse.** On dit que le système est un système linéaire **stable** du premier ordre si et seulement si le **paramètre constant $\boldsymbol{\tau > 0}$.** Nous verrons plus loin ce que cela signifie en physique.

τ est appelée constante de temps du système dont nous allons donner plus bas l'interprétation physique.

b) **Forme générale de la solution**

Nous admettrons que la solution de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation homogène $\boldsymbol{\tau\frac{df_{SEH}}{dt} + f_{SEH}(t) = 0}$ et d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre $f_{SP}(t)$.

On vérifiera aisément que $\boldsymbol{f_{SEH}(t) = \lambda exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$ *où* λ est une constante d'intégration est la solution générale de l'équation homogène. Cette solution est **bornée** pour $t \geq 0$ ssi$\boldsymbol{\tau} > 0$**.** On dit alors ***en physique*** que ***le système est stable.***

A cette solution de l'équation, on doit donc ajouter **une solution particulière** de l'équation avec second membre : $f_{SP}(t)\ et\ donc\ telle$ que $\boldsymbol{\tau\frac{df_{SP}(t)}{dt} + f_{SP}(t) = g(t)}$

La solution de l'équation différentielle est donc du type : $\boldsymbol{f(t) = \lambda exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + f_{SP}(t)}$**.**

On peut remarquer qu'à la limite où $\boldsymbol{t \gg \tau}$, alors f(t) se comporte comme la fonction $f_{SP}(t)$ **:**
$\boldsymbol{f(t) \sim f_{SP}(t)}$ **si $\boldsymbol{t \gg \tau}$.**

Cette solution unique lorsque $\boldsymbol{t \gg \tau}$ est appelée régime permanent du système.

On peut donc écrire que pour un système linéaire stable du première ordre, le régime permanent est la solution particulière de l'équation différentielle à la limite où $t \gg \tau$. La stabilité correspond donc à une équation homogène qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

c) **Cas où g(t) est une constante : g(t)=C**

L'équation différentielle se résume alors à : $\boldsymbol{\tau \frac{df}{dt} + f(t) = C}$

Il est évident que $\boldsymbol{f_{SP}(t) = C}$ **est une solution particulière de cette équation différentielle.**

De plus, d'après la condition initiale : $f(0^+) = \lambda + C$

De sorte que in fine, $\boldsymbol{f(t) = (f(0^+) - C)exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + C}$ **.**

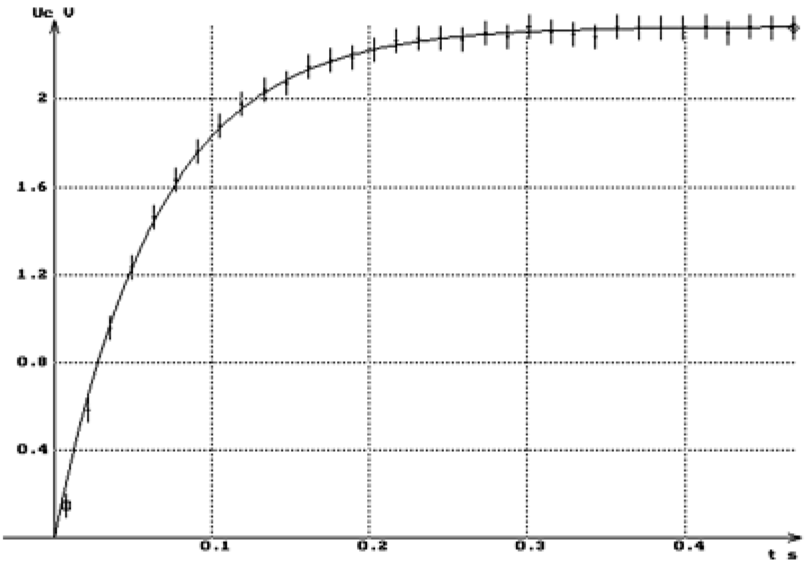
En remarquant que C = $\boldsymbol{lim_{t\to+\infty} f(t)}$**=**$\boldsymbol{f}(+\infty)$**, on peut maintenant énoncer le théorème suivant :**

Théorème : L'équation différentielle du premier ordre suivant $\begin{cases} \tau \frac{df}{dt} + f(t) = \boldsymbol{f}(+\infty) \\ f(0^+)\ connue \end{cases}$ **a pour solution dans le cas où** $\tau \succ 0$ **:**

$$\boldsymbol{f(t) = \left(f(0^+) - f(+\infty)\right)exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + f(+\infty)}$$

Il s'agit donc d'une fonction où l'on passe de ***manière monotone*** de la valeur initiale $f(0^+)$ à la valeur finale $f(+\infty)$ qui sera appelé ici le ***régime permanent continu***.

C'est ce que nous rencontrerons par exemple dans le cas de ***la charge d'une armature de condensateur***.



On appellera donc Gap ℵ noté ou saut, la valeur entre ces deux valeurs extrêmes soit :

$$\aleph = |f(0^+) - \boldsymbol{f}(+\infty)|$$

En supposant que $\boldsymbol{f(0^+)} < f(+\infty)$, $\boldsymbol{o}$n a alors une fonction monotone croissante.

$$On\ parle\ dans\ ce\ cas\ de\ \boldsymbol{front\ montant}.$$

Déterminons le temps pour passer de 10% à 90% du gap .

Pour cela notons que l'on peut écrire aussi l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(+\infty)-f(t)}{\tau} \text{ Ou encore } \frac{df}{f(+\infty)-f(t)} = \frac{dt}{\tau}$$

En intégrant de chaque côté avec des bornes correspondant à l'élément différentielle, il vient :

$$\int_{f(0^+)+\frac{\aleph}{10}}^{f(0^+)+\frac{9\aleph}{10}} \frac{df}{f(+\infty)-f(t)} = \frac{t_{Montée\ de\ 10\%\ à\ 90\%\ du\ gap}}{\tau}$$

Soit encore :

$$\frac{t_{Montée\ de\ 10\%\ à\ 90\%\ du\ gap}}{\tau} = -Ln\left|\frac{-\aleph+\frac{9\aleph}{10}}{-\aleph+\frac{\aleph}{10}}\right| = Ln\left|\frac{9}{1}\right| \approx 2,2$$

C'est un résultat fondamental, puisqu'il apparaît que τ est le temps typique pour atteindre le régime permanent continu.. Pour atteindre, 99% du Gap, on montrerait de la même façon qu'il faut environ 5 τ.

II Les Nombres complexes

En mathématiques, les **nombres complexes** forment une extension de l'ensemble des nombres réels. Ils permettent notamment de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels. Les nombres complexes furent introduits au XVIe siècle par les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Raphaël Bombelli, Nicolo Fontana, dit Tartaglia, et Ludovico Ferrari afin d'exprimer les solutions des équations du troisième degré en toute généralité par les formules de Cardan, en utilisant notamment des nombres de carré négatif, ainsi que les solutions des équations du quatrième degré (méthode de Ferrari).

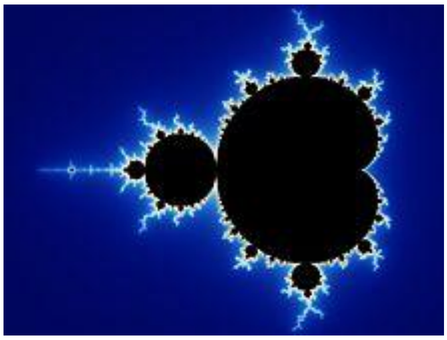
L'ensemble des sommes et produits de nombres réels et du nombre imaginaire $\boldsymbol{i}$ (les nombres de la forme a+$\boldsymbol{i}$b) satisfait les propriétés d'une structure de corps commutatif qui contient le corps des réels. Il est appelé **corps des nombres complexes** et se note$\mathfrak{C}$. Il est muni de l'application module qui généralise la valeur absolue des nombres réels, mais ne peut pas être ordonné totalement de façon compatible avec sa structure de corps.

Ce n'est qu'à partir du XIXe siècle que se développe l'aspect géométrique des nombres complexes, vus comme des éléments ou des transformations du plan, sous l'impulsion de l'abbé Buée et de Jean-Robert Argand (plan d'Argand), puis avec les travaux de Gauss et de Cauchy.

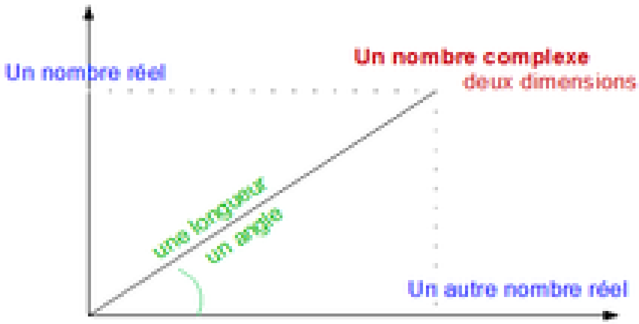
En algèbre, le théorème de d'Alembert-Gauss identifie le degré d'un polynôme complexe non nul au nombre de ses racines comptées avec leur ordre de multiplicité. Le corps des nombres complexes est donc algébriquement clos.

En analyse, l'exponentielle complexe permet de simplifier l'étude des séries de Fourier, puis de définir la transformée de Fourier. La branche de l'analyse complexe concerne l'étude des fonctions dérivables au sens complexe, appelées fonctions holomorphes.

En physique, les nombres complexes sont utilisés pour décrire le comportement d'oscillateurs électriques ou les phénomènes ondulatoires en électromagnétisme.



L'ensemble de Mandelbrot (en noir), illustration d'un système dynamique dans le plan complexe

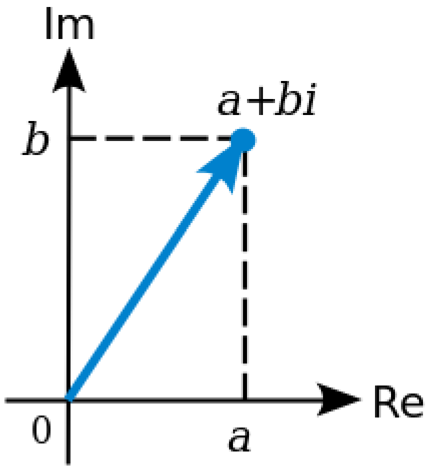


Description (figure ci-dessus) : Représentation d'un nombre complexe dans l'espace à deux dimensions [*en rouge*], sous forme cartésienne [*en bleu*] (avec deux nombres réels) et sous forme polaire [*en vert*] (avec une longueur et un angle).

2-1 Notation des nombres complexes

Les nombres complexes, notés habituellement z, peuvent ainsi être présentés de plusieurs manières :

- forme cartésienne :
  - algébrique : z=x+iy
  - ou vectorielle : z(x,y)
- forme en coordonnées polaires :
  - exponentielle : $z = \rho exp[i\theta]$
  - ou vectorielle : z(ρ, θ)
  - ou trigonométrique[1] : z=$\rho[cos\theta + isin\theta]$



2-2 Forme cartésienne

Un **nombre complexe z** se présente en général en coordonnées cartésiennes, comme une somme a+ib, où a et b sont des nombres réels quelconques et i (l'unité imaginaire) est un nombre particulier tel que $i^2 = -1$.

Le réel a est appelé **partie réelle** de z et se note **Reel(z)** ou, le réel b est sa **partie imaginaire** et se note **Im(z).** .

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Un nombre complexe *z* est dit **imaginaire pur** ou **totalement imaginaire** si sa partie réelle est nulle, dans ce cas il s'écrit sous la forme *z* = *bi* et géométriquement il correspond à un point de l'axe des imaginaires (axe des ordonnées). A l'autre extrême, un nombre complexe dont la partie imaginaire vaut 0 est assimilé à un nombre réel, et géométriquement il correspond à un point de l'axe des réels (axe des abscisses).

Le nombre réel 0 est le seul qui soit à la fois réel et imaginaire pur. Bien sûr la plupart des nombres complexes ne sont ni réels ni imaginaires purs (et correspondent géométriquement à un point du plan en-dehors des axes).

L'addition et la multiplication sur les nombres complexes ont les mêmes propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité que sur les nombres réels. Les règles de calcul s'écrivent donc :

- $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;
- $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

En particulier, cette formule permet d'obtenir l'égalité suivante : $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

Puisque la somme a^2+b^2 de deux carrés de nombres réels est un nombre réel strictement positif (sauf si $a = b = 0$), il existe un inverse à tout nombre complexe non nul avec l'égalité :

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

Cette fraction fait apparaître deux expressions importantes pour le nombre complexe $a+bi$:

- son **conjugué** $\overline{a+bi}=a-bi$ est aussi un nombre complexe
- son **module** $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ est un nombre réel positif.

L'application de conjugaison est un automorphisme involutif : $(\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'})$, $(\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'})$et $(\bar{\bar{z}}=z)$.

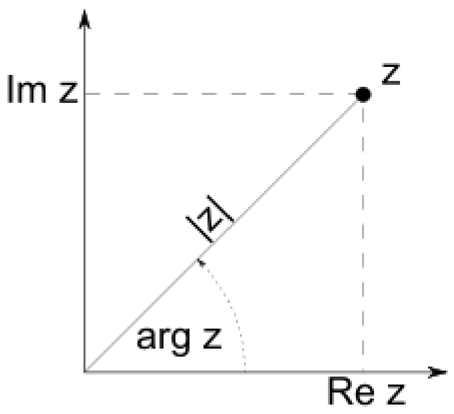
L'application module est une valeur absolue car elle est strictement positive en dehors de 0, sous-additive $(|z+z'|\leq|z|+|z'|)$et multiplicative$(|zz'|=|z|\times|z'|)$.

Les réels sont les seuls nombres complexes qui sont égaux à leur conjugué. Les réels positifs sont les seuls complexes égaux à leur module.

Le nombre 0 est le seul nombre complexe dont le module vaut 0.

2-3 Forme polaire

2-3-1 Plan complexe



Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans un plan complexe $\mathcal{P}$muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$, l'**image** d'un nombre complexe z=a+ib est le point *M* de coordonnées *(a,b)*, son **image vectorielle** est le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le nombre *z* est appelé **affixe** du point *M* ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$(affixe est féminin : une affixe).

Le module $|z|$est alors la longueur du segment$[OM]$.

Si *z* est différent de 0, son image est distincte de l'origine *O* du repère. On appelle alors **argument** de *z* et on note Arg(z) n'importe quelle mesure θde l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, modulo 2π

Par exemple, les réels strictement positifs ont un argument multiple de2π , les réels strictement négatifs ont pour argument un multiple impair de π.

Les imaginaires purs non nuls ont un argument congru à $\frac{\pi}{2}$ou $-\frac{\pi}{2}$modulo2π , selon le signe de b.

Le plan $\boldsymbol{P}$, muni de son repère orthonormé et des actions des nombres complexes par addition et multiplication, est appelé **plan complexe**. Puisque tous les plans complexes sont canoniquement isomorphes, on parle du plan complexe sans préciser davantage.

2-3-2 Coordonnées polaires

Le module et l'argument d'un nombre complexe correspondent aux coordonnées polaires de son image dans le plan complexe. En écrivant les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées polaires, tout nombre complexe non nul peut donc s'écrire sous une **forme trigonométrique** z=$r[cos\theta + isin\theta]$avec $r > 0$

La formule d'Euler $\exp(i\theta) = cos\theta + isin\theta$permet de compacter cette écriture sous une **forme exponentielle** $z = rexp[i\theta]$.

Le conjugué s'écrit alors simplement : $\bar{z} = r\ exp[-i\theta]$.

Cette écriture est en outre adaptée au calcul du produit de deux nombres complexes du fait des propriétés multiplicatives de la fonction exponentielle :

- $\left(re^{i\theta}\right)\left(r'e^{i\theta'}\right) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$,
- $\left(re^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\cos(-\theta) + i\frac{1}{r}\sin(-\theta)$.

Pour calculer l'argument en fonction des coordonnées cartésiennes, si la formule cartésienne est sous la forme a+bi, il suffit d'utiliser $\boldsymbol{(\theta)} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{sin\theta} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}}$

2-3-3 Interprétation géométrique des opérations

Soit *z* et *z'* deux nombres complexes d'images respectives Met M'.

- L'image M''de la somme $z + z'$est définie par la relation$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

L'action d'un nombre complexe par addition s'interprète géométriquement comme une translation selon le vecteur image.

- Soit λun nombre réel, l'image M_1du produit λzest défini par la relation$\overrightarrow{OM_1} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

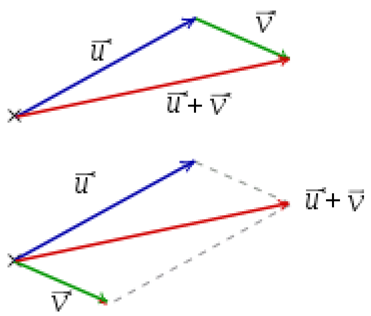
L'action du nombre réel λ par multiplication scalaire s'interprète géométriquement comme une homothétie de centre *O* et de rapport λ sur le plan complexe.

- Si *z* est de module 1 et d'argument θ, l'image M'' du produit zz' est définie par les relations de longueurs $OM'' = OM'$ et d'angles $\left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}\right) = \theta$.

L'action d'un nombre complexe de module 1 par multiplication s'interprète géométriquement comme une rotation de centre l'origine et d'angle l'argument.

- Par composition d'une homothétie et d'une rotation, l'action d'un nombre complexe *z* non nul par multiplication s'interprète géométriquement comme une similitude directe de centre l'origine, de rapport $|z|$ et d'angle $\arg(z)$.
- L'image du conjugué $\bar{z}$ de z est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
- L'image de l'inverse $\frac{1}{z}$ de z est l'image de M par l'inversion par rapport au cercle unité, composée avec la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

III : Les vecteurs en physique



Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le vecteur somme. (Figure ci contre)

En mathématiques, un **vecteur** est un élément d'un espace vectoriel, ce qui permet d'effectuer des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. Un n-uplet peut constituer un exemple de vecteur, à condition qu'il appartienne à un ensemble muni des opérations adéquates. On représente fréquemment les vecteurs comme de simples n-uplets ou, graphiquement, dans le cas particulier des espaces à 1, 2 ou 3 dimensions, par des flèches.

En mathématiques, rigoureusement axiomatisée, la notion de vecteur est le fondement de la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire. En physique, les vecteurs sont grandement utilisés, ils permettent de modéliser des grandeurs comme une force ou un champ électrique. On parle aussi de vecteur-vitesse.

La notion est issue de la combinaison des notions de couple de points de la géométrie euclidienne (qui permettent de définir les distances, mais aussi la direction et le sens), et des possibilités de calcul offertes par l'algèbre.

La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan), trois (l'espace euclidien usuel), et plus généralement dans des espaces vectoriels de dimension quelconque.

3-1 Histoire (Lecture intéressante mais non nécessaire à la compréhension des concepts).

La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencée voici plus de deux mille ans. Deux familles d'idées, d'abord distinctes, sont à l'origine de la formalisation. L'une d'elle est la géométrie, traitant de longueurs, d'angles et de mesures de surfaces et de volumes. L'autre correspond à l'algèbre, qui traite des nombres, de l'addition ou la multiplication et plus généralement d'ensembles munis d'opérations. Un vieux problème d'algèbre nous vient par exemple des Égyptiens et s'exprime de la manière suivante :

« On doit diviser 100 miches de pain entre dix hommes comprenant un navigateur, un contremaître et un gardien, tous trois recevant double part. Que faut-il donner à chacun ? »

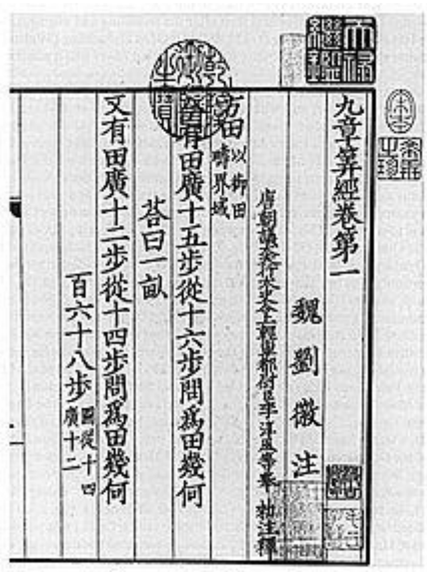
Ces deux familles d'idées sont développées indépendamment, pour finir par converger vers la notion de vecteur.

3-1-1 Origines des deux concepts

Les *Éléments* formalise une structure géométrique initialement utilisé pour décrire l'ancêtre de l'espace vectoriel.

La civilisation grecque développe la géométrie à un niveau inégalé à cette époque. L'un des fleurons est le traité nommé *les Éléments d'Euclide*, datant du IIIe siècle av. J.-C.. Il contient la formalisation, très rigoureuse pour l'époque, d'une géométrie, encore maintenant appelée euclidienne. On y trouve les définitions d'une droite, d'un plan ou de notre espace physique de dimension trois permettant de modéliser des volumes. Les propriétés des distances, des angles, des mesures de surfaces et de volumes sont étudiées. Les théorèmes fondateurs, comme ceux appelés Thalès ou Pythagore, sont explicités et démontrés.

L'algèbre y est peu développée et contient essentiellement de l'arithmétique. Les nombres entiers et rationnels sont étudiés ainsi que quelques irrationnels, c'est-à-dire les nombres qui ne s'écrivent pas sous forme d'une fraction d'entiers. Les nombres sont toujours strictement positifs.


九章算經卷第一
魏 劉 徽 注
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步

Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique ont en Chine un rôle analogue aux Éléments d'Euclide en occident.

La Chine développe les premières idées algébriques à l'origine des vecteurs. Un vieux texte, datant probablement du Ier siècle av. J.-C. : les Neuf Chapitres sur l'art mathématique y consacre sa huitième partie. Elle s'intitule *Fang cheng* ou *Disposition rectangulaire* et traite d'un problème maintenant appelé système d'équations linéaires. Cette culture n'en reste pas là, Qin Jiushao (1202 - 1261) généralise cette étude à des nombres différents des entiers ou rationnels. Il utilise les congruences, inaugurant une démarche consistant à définir des vecteurs sur des ensembles de nombres exotiques. Il peut ainsi résoudre des problèmes liés au calendrier et aux alignements de planètes avec une très grande précision La méthode utilisée ne sera connue qu'au XIXe siècle en Occident, sous le nom de pivot de Gauss. Ce résultat est suffisamment étonnant pour que Libbrecht précise que :

« Nous ne devrions pas sous-estimer la percée révolutionnaire de Qin, en effet, depuis le théorème des restes chinois de Sun Zi, on passe sans intermédiaire à un algorithme plus avancé que la méthode de Gauss elle-même, et il n'y a pas la moindre indication d'une évolution graduelle »

L'aspect géométrique n'échappe pas aux mathématiciens chinois. Le dernier chapitre, le *Gou gu* comporte un équivalent du théorème de Thalès et de Pythagore

3-1-2 Convergence de l'algèbre et de la géométrie

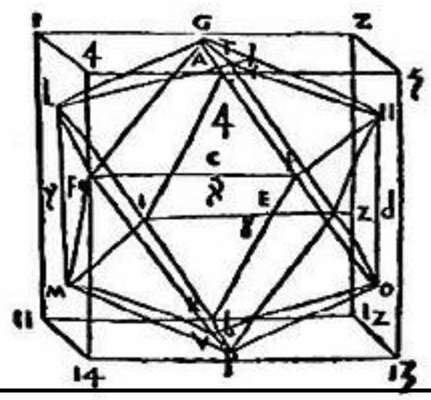
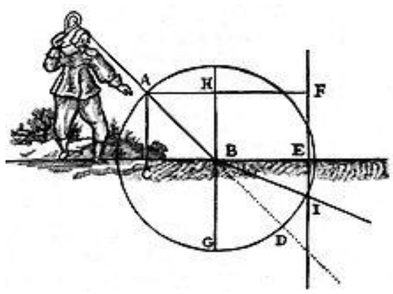


Illustration extraite du traité de perspective *De prospectiva pingendi* de Piero della Francesca, un peintre de la renaissance italienne.

L'existence de lien entre ce que l'on appelle maintenant l'algèbre et la géométrie est ancienne. Les Babyloniens connaissaient déjà la propriété algébrique de la diagonale d'un carré de côté de longueur *un*, à savoir que son carré est égal à *deux*. Ils savaient de plus calculer cette valeur avec une remarquable précision. Ce lien est aussi connu des Grecs et des Chinois.

Il faut cependant attendre la civilisation arabe pour observer un progrès significatif. Leurs mathématiciens connaissaient les travaux des Grecs, particulièrement ceux d'Euclide. Les notations utilisées laissent penser qu'ils avaient aussi accès à des travaux des premiers mathématiciens chinois. Le progrès déterminant consiste à associer au plan géométrique des coordonnées. Omar Khayyam (1048 - 1131) cherche les solutions d'un problème purement algébrique : trouver les racines d'un polynôme du troisième degré. Un système de coordonnées lui permet de visualiser ces racines comme les abscisses des intersections d'une parabole et d'une hyperbole. Le système des coordonnées est repris en Europe. La volonté de maitriser la perspective pousse les peintres italiens à étudier les mathématiques. Filippo Brunelleschi (1377 - 1446) découvre les lois de la perspective, issues d'une projection centrale. Ces résultats sont formalisés par Leon Battista Alberti (1404 - 1472). Les théoriciens de la perspective disposent de multiples talents. Ainsi Piero della Francesca (vers 1412 - 1492), auteur d'un traité sur la question est à la fois peintre et mathématicien. Giorgio Vasari (1511 - 1574) indique, à propos de ses talents de géomètre « il ne fut inférieur à personne de son époque et peut-être de tout temps ».

3-1-3 Les apports de la physique



René Descartes utilise l'optique pour développer le concept de repère cartésien. L'illustration provient de son traité : *Les Dioptriques*.

La physique est le moteur suivant de la convergence entre géométrie et algèbre. En 1604, Galileo Galilei (1564 - 1642) établit la loi de la chute des corps. Les illustrations de ses notes montrent l'utilisation d'un repère. L'optique est la branche qui aboutit au progrès le plus marquant. Pierre de Fermat (1601 - 1665), qui connaissait les écrits de Galilée, et René Descartes (1596 - 1650) s'écrivent des lettres au sujet de la dioptrique (la manière dont la lumière se réfléchit sur un miroir) et à la réfraction (la déviation d'un rayon lumineux quand il change de milieu, par exemple en passant de l'air à l'eau). Ils arrivent à la conclusion qu'un repère est une méthode systématique permettant d'appréhender *tous* les problèmes de géométrie euclidienne. Ces résultats sont consignés dans un traité de Descartes. Il écrit en introduction : « Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie ». Pour Descartes, calcul d'arithmétique signifie approximativement ce qui est maintenant appelé algèbre. Cette approche est particulièrement féconde pour l'étude d'une branche naissante des mathématiques : la géométrie analytique. Un exemple est donné par l'étude de la cycloïde. Cette courbe décrit la trajectoire d'un point de la surface d'une roue se déplaçant sans glissement sur un sol horizontal.

Isaac Newton (1643 - 1727) développe la géométrie analytique et l'utilise en astronomie. Cette application est l'origine de l'utilisation du terme vecteur. En 1704, un dictionnaire technique anglais indique :

« Une ligne dessinée depuis une planète, se déplaçant autour d'un centre ou du foyer d'une ellipse, jusqu'à ce centre ou ce foyer, est appelé Vecteur par quelques auteurs de la Nouvelle Astronomie, car cette ligne semble porter la planète autour du centre. »

Ce terme apparait en français sous la plume de Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827) dans l'expression *rayon vecteur*, encore dans un contexte astronomique. Il vient du latin ***vector*** et désigne le conducteur d'un chariot. Son origine est plus ancienne, elle provient de l'indo-européen *VAG, ou *VAGH et signifie chariot.

Ainsi, au XVIIe siècle, le contexte géométrique et algébrique du vecteur est présent. En revanche, aucune formalisation n'est proposée et le terme, s'il est utilisé, désigne encore une grandeur scalaire.

3-2 La Formalisation

Giusto Bellavitis est un mathématicien italien auteur de la formalisation des vecteurs par la notion de bipoint et d'équipollence.

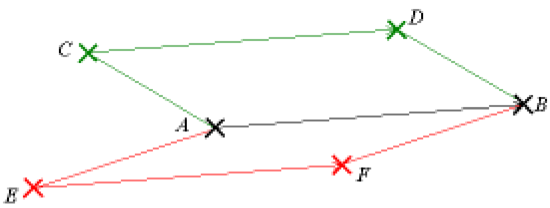
La première formalisation des vecteurs est le fruit d'un travail de plusieurs mathématiciens durant la première moitié du XIXe siècle. Bernard Bolzano (1781 - 1848) publie un livre élémentaire contenant une construction axiomatique de la géométrie analogue à celle d'Euclide, fondée sur des points, droites et plans. Il adjoint les opérations algébriques d'addition et de multiplication. La géométrie projective, héritière du travail sur la perspective des peintres de la renaissance italienne, conduit Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867) et Michel Chasles (1793 - 1880) à affiner les travaux de Bolzano. August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) apporte sa pierre à l'édifice en développant le système de coordonnées barycentriques. Enfin, la formalisation encore actuellement enseignée, à partir des notions de bipoint et d'équipollence, est l'œuvre de Giusto Bellavitis (1803 - 1880).

3-2-1 **Approche géométrique**

La géométrie euclidienne est la géométrie du plan ou de l'espace fondée sur les axiomes d'Euclide. Les notions de point, de droite, de longueur, sont introduites par le biais d'axiomes. Le vecteur est alors un objet géométrique construit à partir des précédents.

Une visualisation intuitive d'un vecteur correspond à un *déplacement* d'un point, ou pour utiliser le terme mathématique précis, une translation. Ainsi un vecteur possède une longueur, la distance entre le point de départ et d'arrivée, une direction si le déplacement n'est pas nul, c'est la droite contenant le point de départ et d'arrivée et un sens, depuis le départ jusqu'à l'arrivée.

a) Définition



Les bipoints (A,B), (C,D), (E,F) sont équipollents. Ils constituent trois représentants d'un même vecteur. En effet, les quadruplets de points ABFE et ABDC définissent deux parallélogrammes.

Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ et un point d'arrivée. L'emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance, deux déplacements de deux points d'origine distincts peuvent correspondre au même vecteur, seuls comptent sa longueur, sa direction et son sens. Il est donc possible de le faire glisser librement dans le plan, parallèlement à lui-même.

Une définition formelle utilise au préalable la notion de **bipoint**. Il est défini comme un couple de points. L'ordre a une importance : le premier point est appelé **origine**. Deux bipoints (**A**,**B**) et (**C**,**D**) sont dits équipollents lorsque les segments [AD] et [BC] ont le même milieu. La relation d'équipollence constitue une relation d'équivalence sur les bipoints. Une classe d'équivalence contient tous les bipoints dont le deuxième membre est l'image du premier point par le déplacement.

La classe d'équivalence d'un bipoint (**A**,**B**) est appelée vecteur et est notée $\overrightarrow{AB}$. Le bipoint (**A**, **B**) en est un représentant. Réciproquement, tout vecteur admet plusieurs bipoints représentants, dont aucun n'est privilégié. Si une origine O est choisie, il existe un unique bipoint représentant un vecteur donné et contenant O.

Ainsi deux bipoints (*A*,*B*) et (*C*,*D*) sont équipollents si et seulement s'ils représentent le même vecteur et on peut alors écrire l'égalité

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Tous les bipoints constitués de la répétition d'un même point : (*A*, *A*), sont équipollents entre eux, ils sont les représentants d'un vecteur qualifié de **nul**. Il est noté

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}.$$

Les théories présentant les vecteurs comme une classe d'équivalence de bipoints les notent en général par une lettre surmontée d'une flèche

b) Longueur et angle

La longueur d'un bipoint **(A,B)** est définie comme la longueur du segment sous-jacent. Deux bipoints équipollents ont la même longueur. Tous les représentants d'un vecteur $\vec{u}$ont donc la même longueur, qui est appelée **norme** (ou **module**) du vecteur $\vec{u}$et notée en général $||\vec{u}||$(on utilise aussi parfois simplement la ou les lettres désignant le vecteur sans la flèche, par exemple *u* ou *AB*). Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.Il est généralement noté $\hat{u}$ Le vecteur nul est de norme nulle. .

L'angle que forment deux vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$est noté $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$. Il est défini comme l'angle que font deux représentants de même origine. Ainsi si (*A*, *B*) est un représentant de $\vec{u}$et (*A*,*C*) un représentant de $\vec{v}$, alors

$$\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{BAC}$$

Dans le plan orienté, il est possible de définir la notion d'angle orienté de deux vecteurs. Ce n'est pas le cas dans l'espace.

c) Opérations

Des constructions géométriques permettent la définition de l'addition et de la multiplication par un scalaire. Le nom donné aux opérations est la conséquence de la similarité avec les opérations sur les nombres (commutativité, associativité et distributivité, présence d'un élément neutre et absorbant). Pour cette raison, non seulement les noms des opérations mais les notations sont similaires.

Si $\vec{u}$et $\vec{v}$sont deux vecteurs, soit un couple (*A*, *B*) de points représentant $\vec{u}$et *C* le point tel que le couple (*B*, *C*) représente le vecteur$\vec{v}$. Alors un représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$est le couple (*A*, *C*). Si $\vec{v}$est le vecteur nul, alors les points *B* et *C* sont confondus, la somme est alors égale à $\vec{u}$et le vecteur nul est bien l'élément neutre pour l'addition des vecteurs. Soit α un nombre, si $\vec{u}$est le vecteur nul, alors α.$\vec{u}$ est aussi le vecteur nul, sinon il existe une unique droite contenant *A* et *B*, et un unique point *C* tel que la distance entre *A* et *C* soit égale à $|\alpha|$.$||\vec{u}||$et le sens de (*A*, *B*) si α est positif, relativement au sens de$\vec{u}$, et l'inverse sinon.

Une fois équipée d'une structure d'espace vectoriel, les démonstrations de la géométrie euclidienne s'avèrent souvent simplifiées. Un exemple est donné par le théorème de Thalès.

3-2-2 : Approche algébrique

a) Coordonnées et vecteurs colonnes

Dans un plan, deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ non nuls et de directions différentes possèdent une propriété importante. Un vecteur $\vec{u}$ quelconque est somme d'un multiple de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Cela signifie qu'il existe deux uniques nombres u_1 et u_2 tel que :

$$\vec{u} = u_1\vec{a} + u_2\vec{b}$$

$\vec{u}$ est alors qualifié de combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Comme tout vecteur du plan s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la famille ($\vec{a}$, $\vec{b}$) est qualifiée de base du plan et u_1, u_2 sont appelés composantes[31] du vecteur $\vec{u}$ dans cette base. Cette définition correspond à celle d'un plan affine muni d'un repère. Une telle propriété est encore vraie dans l'espace. Cependant, deux vecteurs ne suffisent plus, toute base contient exactement trois vecteurs non nuls et dont les directions ne sont pas coplanaires (c'est-à-dire qu'il n'existe aucun plan contenant les trois directions). Si dans l'espace, les trois composantes d'un vecteur $\vec{u}$ sont u_1, u_2 et u_3, il est d'usage de noter :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Pour indiquer les composantes du vecteur. Le tableau est appelé **vecteur-colonne** et correspond à un cas particulier de matrice. Les opérations algébriques sur les vecteurs sont simples, avec une telle représentation. Additionner deux vecteurs revient à additionner chacune des composantes et la multiplication par un scalaire revient à multiplier chaque composante par le scalaire.

Dans un plan vectoriel, un vecteur s'identifie à un couple de scalaires, et dans l'espace à un triplet. Si les nombres choisis sont réels alors un plan (respectivement un espace) s'identifie à $\mathbb{R}^2$ (respectivement à $\mathbb{R}^3$). Ici, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

b) Ébauche d'une construction algébrique

La logique précédente, appliquée pour une dimension égale à deux ou trois se généralise. Il est ainsi possible de considérer la structure $\mathbb{R}^n$ ou de manière plus générale K^n avec K un ensemble de scalaires possédant de bonnes propriétés (précisément, K est un corps commutatif). Une telle structure possède une addition, et une multiplication par un scalaire définies comme au paragraphe précédent.

Il est possible de généraliser encore la définition d'un vecteur. Si un ensemble E possède une addition et une multiplication scalaire sur un corps commutatif et si ses opérations vérifient certaines propriétés, appelées axiomes et décrites dans l'article détaillé, alors E est appelé **espace vectoriel** et un élément de E vecteur.

De très nombreux exemples d'ensembles mathématiquement intéressants possèdent une telle structure. C'est le cas par exemple des espaces de polynômes, de fonctions vérifiant certaines propriétés de régularité, de matrices... Tous ces ensembles peuvent alors être étudiés avec les outils du calcul vectoriel et de l'algèbre linéaire.

La notion de dimension fournit le premier résultat de classification concernant les espaces vectoriels. Dans un espace vectoriel de dimension finie n, il est possible, moyennant le choix d'une base, de se ramener au calcul sur des vecteurs colonnes de taille n. Il existe également des espaces vectoriels de dimension infinie. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est ainsi un espace vectoriel sur le corps des nombres réels, de dimension infinie. Vue sous cet angle, une telle fonction est un vecteur.

3-3 Construction algébrique et géométrie

Si les deux constructions, algébrique et géométrique sont équivalentes pour les structures vectorielles du plan et de l'espace usuel, la géométrie apporte en plus les notions de distance et d'angle.

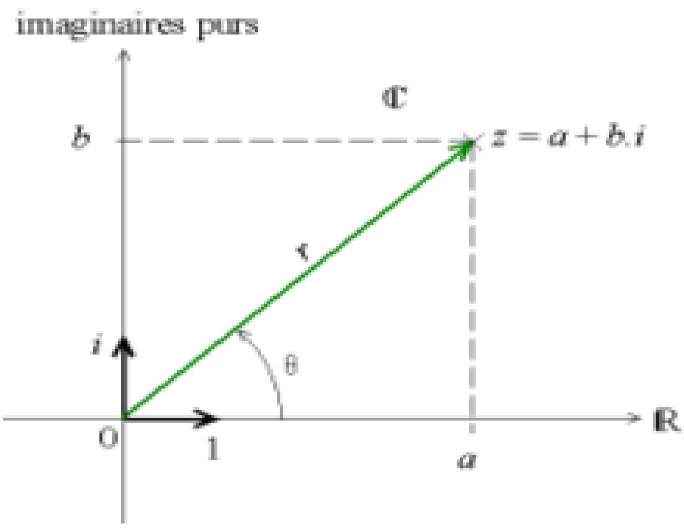
La notion de produit scalaire permet de combler cette lacune. Un produit scalaire associe à deux vecteurs un réel. Si les deux vecteurs sont identiques le réel est positif. Il existe un produit scalaire tel que la norme du vecteur soit égale à la racine carrée du produit scalaire du vecteur avec lui-même. La géométrie euclidienne apparait alors comme l'étude d'un espace affine comprenant un espace vectoriel de dimension deux ou trois sur le corps des réels, muni d'un produit scalaire : plan affine euclidien ou espace affine euclidien.

Une fois équipée d'un produit scalaire, il devient possible de définir sur l'espace vectoriel des transformations classiques de géométrie euclidienne comme la symétrie, la rotation ou la projection orthogonale. La transformation associée aux espaces vectoriels laisse toujours invariant le vecteur nul. Les rotations permettent de définir la notion d'angle pour les vecteurs. L'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est égal à $(\widehat{\vec{u'},\vec{v'}})$ si et seulement s'il existe une rotation qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{u'}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{v'}$. Cette définition, qui s'applique à une formalisation algébrique de la notion d'espace vectoriel, est équivalente à celle de la construction géométrique. Une telle approche simplifie parfois grandement les démonstrations, un exemple est le théorème de Pythagore.

L'approche algébrique permet de définir toutes les notions de la géométrie euclidienne, elle généralise cette géométrie à une dimension quelconque si les nombres sont réels. Dans le cas des nombres complexes une construction analogue, appelée espace hermitien, existe.

3-4 Utilisations des vecteurs

3-4-1 Mathématiques



Représentation graphique d'un point dans le plan complexe. Les coordonnées cartésiennes correspondent à celle d'un point dans le repère de centre *zéro* et de base les nombres *un* et l'unité imaginaire.

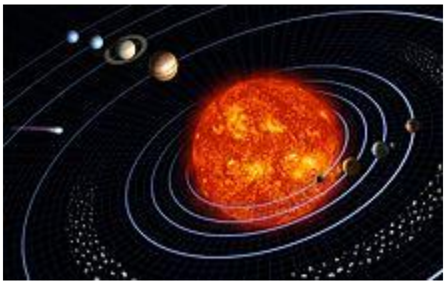
Une vaste partie des mathématiques utilise les vecteurs, en algèbre, en géométrie ou en analyse.

Un exemple archétypal en algèbre est la résolution d'un système d'équations linéaires. Un exemple de trois équations à trois inconnues correspond à la recherche des vecteurs de dimension trois, antécédents d'une application linéaire d'un vecteur donné. Le plan euclidien peut aussi être confondu avec le plan complexe, le plan $\mathbb{R}^2$ étant topo logiquement équivalent au plan d'Argand $\mathbb{C}$. La base canonique est composée de deux vecteurs unitaires : l'unité des réels et l'unité imaginaire.

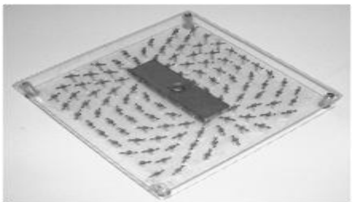
Les vecteurs offrent un outil efficace pour la résolution de nombreux problèmes de géométrie. Ils sont utilisés pour la détermination de propriétés de parallélisme ou d'orthogonalité de droites, plan ou segments. À travers l'utilisation des coordonnées barycentriques, les vecteurs forment un outil adapté pour caractériser le centre d'une figure géométrique et permettent une démonstration simple du théorème de Leibniz, du théorème de Ceva comme de nombreux résultats sur la géométrie du triangles. Le produit scalaire, qui s'exprime particulièrement simplement dans une base orthonormée, offre de nombreuses possibilités. Il permet, par exemple, de mesurer la distance d'un point à une droite ou à un plan. Une telle base permet d'exprimer aussi simplement des transformations géométriques comme la projection orthogonale sur un plan ou une droite.

L'analyse n'est pas en reste. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, copie du plan euclidien est le cadre naturel de représentation du graphe d'une fonction. Les vecteurs permettent par exemple de déterminer la droite perpendiculaire à une courbe en vue de déterminer les foyers d'une conique. La représentation graphique offre une solution pour déterminer une approximation d'une racine d'une équation dans le cas où une résolution par une méthode algébrique n'est pas connue

3-4-2 Physique



La trajectoire des planètes se modélise dans un langage vectoriel. Les travaux d'Isaac Newton sur cette question sont à l'origine du mot vecteur.



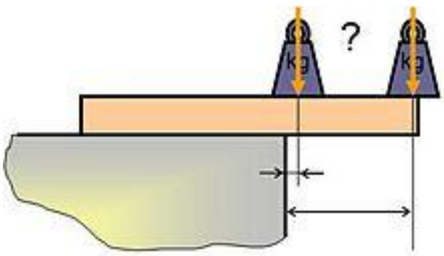
En présence d'un champ magnétique, des petites boussoles s'orientent, indiquant la direction et le sens des vecteurs du champ.

La physique est à l'origine du terme de vecteur, elle utilise toujours largement ce concept. La raison historique provient du fait qu'en physique classique l'espace qui nous entoure est bien modélisé comme espace affine (géométrie euclidienne) de dimension trois avec le temps (absolu) comme paramètre d'évolution. En physique, une addition de vecteurs ne peut avoir de sens que si leurs coordonnées respectives ont la même dimension.

La position d'un point est décrite par des coordonnées dans un repère, mais sa vitesse et son accélération sont des vecteurs. Pour établir la mécanique du point, c'est-à-dire l'étude des mouvements d'un point matériel, les vecteurs sont indispensables. La position d'un point se modélise par ses trois coordonnées (qui sont des nombres réels) dont chacune est une fonction du temps ; on peut aussi la décrire par le *vecteur position* allant de l'origine du repère au point : les composantes du vecteur sont alors identifiables aux coordonnées du point. Le vecteur vitesse est égal à la dérivée du vecteur position (c'est-à-dire : les composantes du vecteur vitesse sont les dérivées de celles du vecteur position), et c'est encore un vecteur. Il en est de même pour l'accélération, correspondant à la dérivée seconde.

Dans un référentiel galiléen, l'accélération d'un point est proportionnelle à la force qui lui est appliquée. Une force est équivalente à un vecteur. La trajectoire d'une planète est connue par la force qui lui est appliquée à chaque instant. Cette force est la conséquence de la gravitation, essentiellement due au Soleil. Ce phénomène est décrit par la donnée du champ gravitationnel. Ce champ associe un vecteur proportionnel à la force de la gravitation à chaque point de l'espace.

3-4-3 **Vecteur lié, vecteur libre, vecteur glissant.**

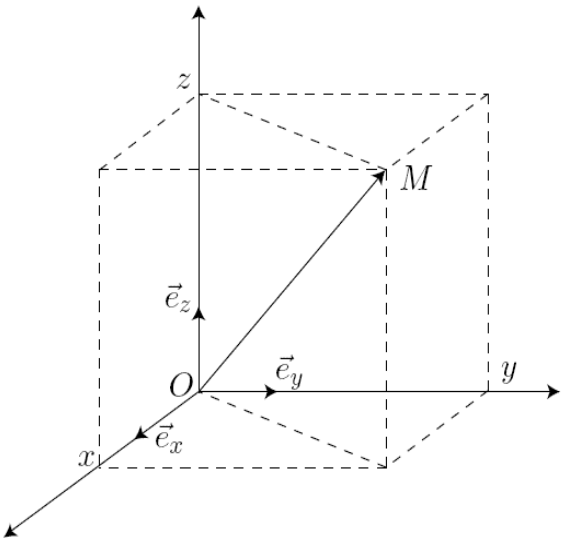


Selon le point d'application des forces, le solide bascule ou non. L'objet mathématique associé est un vecteur glissant.

Les lois établissant les mouvements d'un point s'appliquent aussi dans le cas d'un solide, mais dans ce cas le point d'application de la force possède une importance cruciale. Selon sa position, le solide tourne en plus du déplacement de son centre de gravité. Pour tenir compte de ce phénomène, de nouvelles définitions sont proposées. Un **vecteur lié** ou **pointeur** est un couple composé d'un vecteur et d'un point appelé **point d'application**. La rotation du solide est la conséquence d'une grandeur physique appelé moment. Elle ne dépend pas de la position du vecteur sur une droite donnée. Pour cette raison, un **vecteur glissant** est un couple composé d'un vecteur et d'une droite affine. Dans ce contexte, et pour éviter toute ambigüité, un vecteur au sens classique du terme est appelé **vecteur libre.**

IV LES BASES DE PROJECTION UTILISEES EN SCIENCE PHYSIQUE

4-1 LES COORDONNES CARTESIENNES



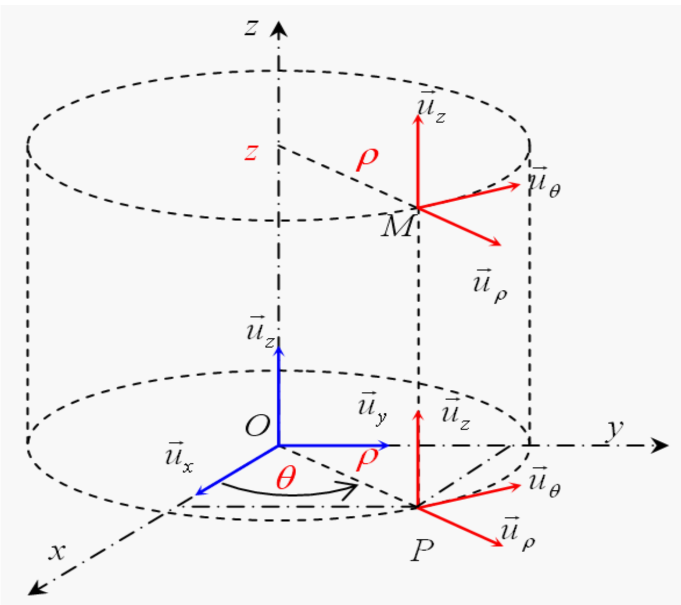
On associe au référentiel $\mathcal{R}$ une base de projection cartésienne formée d'une base orthonormée directe ne dépendant pas du temps dans $\mathcal{R}$ et d'une origine O fixe. On appelle **vecteur position** du point M à un instant t, le vecteur :

Un **petit déplacement** du point M sur une courbe s'écrira :

$$d\overrightarrow{OM} == dx\ \widehat{e_x} + dy\ \widehat{e_y} + dz\ \widehat{e_z}$$

Un **volume élémentaire** s'écrire : $\delta V = dxdydz$ produit des trois déplacements élémentaires à partir d'un point de coordonnées (x, y, z).

4-2 LES COORDONNES CYLINDRIQUES



Un point M de l'espace peut être positionné fictivement sur un cylindre d'axe Oz et de rayon ρ=PO où P est le projeté orthogonal de M sur le plan Oxy. L'axe Oz est appelé axe polaire.

On définit alors une **base locale** directe **attachée au point M** formé des trois vecteurs unitaires

$\boldsymbol{\hat{u}_\rho(\theta)} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}}{\boldsymbol{\rho}}$, $\boldsymbol{\hat{u}_z}$, et $\boldsymbol{\hat{u}_\Theta(\theta)}$ tangente au cylindre et telle que la base $[\hat{u}_\rho(\theta), \hat{u}_\Theta(\theta), \hat{u}_z]$ forme une **base directe** .

Dans la base locale, on a pour le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho(t)\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$. On prendra garde au faut que si l'angle θ n'apparaît pas explicitement dans les coordonnées de la base locale, il est impératif de le connaître pour positionner $\hat{u}_{\rho}(\theta)$

Les composantes de $\hat{u}_{\rho}(\theta), \hat{u}_{\Theta}(\theta)$, sont simples : $\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta})\,\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \mathbf{sin}\,(\boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$ et

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{x}} + \mathbf{cos}\,(\boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{y}}$$

On voit donc de suite que : $\frac{\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{d\theta}} = \hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$ **et** $\frac{\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{d\theta}} = -\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\theta})$

On constate donc que dériver un vecteur de base mobile par rapport à l'angle revient à le tourner autour de l'axe polaire d'un angle de $\frac{\pi}{2}$. De la même façon, nous avons :

$\frac{\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{d\theta}}\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$ $\frac{\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{dt}} = -\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\theta})$
Dérivée des vecteurs de base

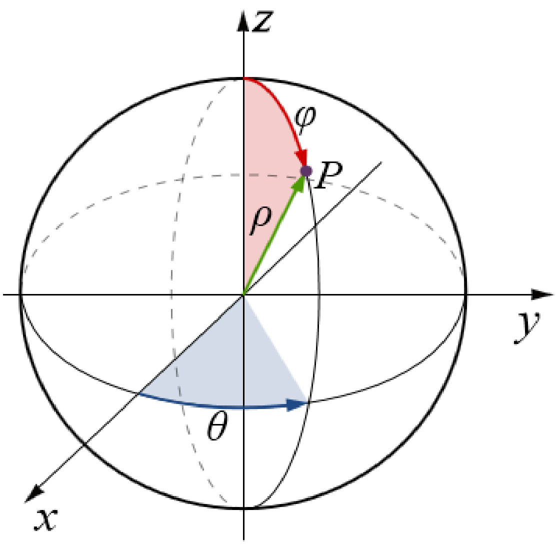
On a dans le cas général :

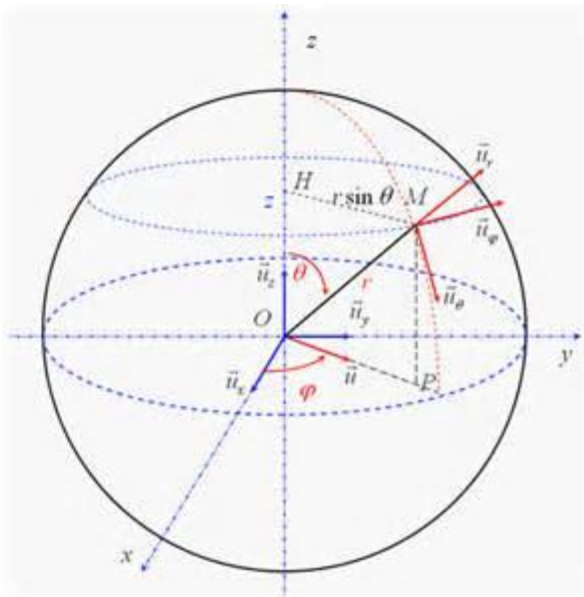
Un **petit déplacement** du point M sur une courbe s'écrira

$$\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{d\rho}\widehat{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\rho}}} + \boldsymbol{\rho d\theta}\ \hat{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{dz}\ \widehat{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{z}}}$$

Un **volume élémentaire** s'écrire : $\boldsymbol{\delta V} = (\boldsymbol{d\rho})(\boldsymbol{\rho d\theta})(\boldsymbol{dz})$ produit des trois déplacements élémentaires à partir d'un point M.

4-3 LES COORDONNES SPHERIQUES

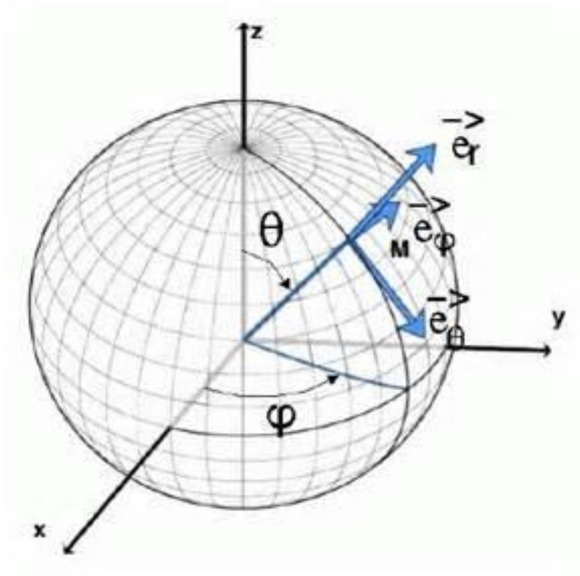




Étant donné un repère cartésien (O, ***x***, ***y***, ***z***), les coordonnées sphériques (ρ, ϕ, θ) d'un point *P* sont définies par :

- *ρ* est la distance du point *P* au centre *O* et donc *ρ* > 0;
- ***ϕ*** est l'angle non orienté formé par les vecteurs ***z*** et ***OP***, appelé angle zénithal ou colatitude ;
- *θ* est l'angle orienté formé par les demi-plans ayant pour frontière l'axe vertical et contenant respectivement la demi-droite [*O*, ***x***) et le point *P*. Si *H* est le projeté orthogonal de *P* dans le plan horizontal (*O*, ***x***, ***y***), alors *θ* peut être défini comme l'angle formé par les vecteurs ***x*** et ***OH***.

Par convention, et pour assurer l'unicité de *ρ*, l'angle *ϕ* est compris entre 0 et *π* radians (0 et 180°) et *θ* entre 0 et *2π* radians (0 et 360°)[1] (pour le repérage, mais *θ* et *ϕ* peuvent parcourir un intervalle plus important pour une courbe paramétrée *ρ*(*θ*, *ϕ*)). En conséquence la relation de passage aux coordonnées cartésiennes s'écrit :



<u>On a alors les expressions suivantes :</u>

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{r(t)}\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}$$

<u>Par ailleurs et dans le cas général :</u>

Un **petit déplacement** du point M sur une trajectoire s'écrira

$$\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}} = \boldsymbol{\overrightarrow{V(t)}dt} = \boldsymbol{dr\widehat{e_r}} + \boldsymbol{rd\theta\ \hat{e}_\theta} + \boldsymbol{rsin\theta d\varphi\ \widehat{e_\varphi}}$$

Un **volume élémentaire** s'écrire : $\boldsymbol{\delta V} = (\boldsymbol{dr})(\boldsymbol{rd\theta})(\boldsymbol{rsin\theta d\varphi})$ produit des trois déplacements élémentaires à partir d'un point M.