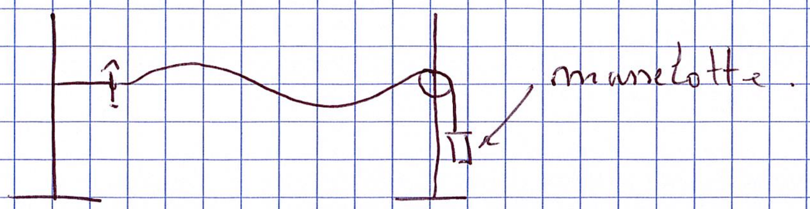
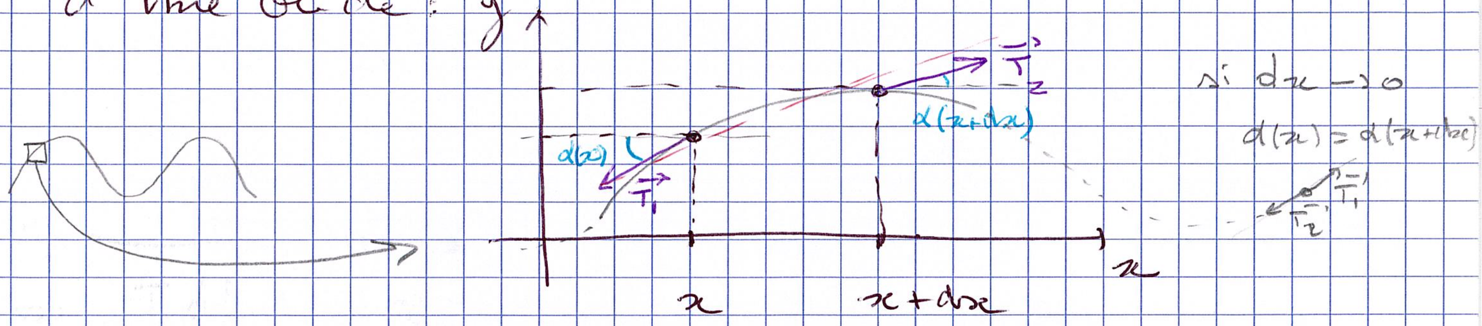
Corde de Melde étude complète.



① D'ALEMBERT
② GUITARE
③ MELDE

I Etablissement de l'équation de d'Alembert

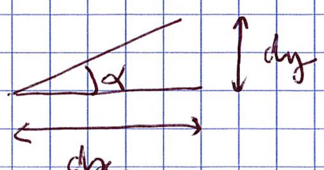
Dans un premier temps on étudie la propagation d'une onde :



Bilan entre 2 positions de la corde
→ On néglige le poids de la corde.
→ On néglige l'élasticité de la corde.

Il existe en x et $x+dx$ une force de tension $\vec{T}$ qui résulte du tronçon à côté de la corde.
$\alpha(x)$ et $\alpha(x+dx)$ sont les angles que forment $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ avec l'horizontale

→ On suppose des petits angles : $\sin\alpha = \alpha$
$\tan\alpha = \alpha$
$\cos\alpha = 1$.



$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$

Application de la | Théorème du centre d'inertie.
| 2^{e} Loi de Newton.
| Principe fondamental de la dynamique

Sur le morceau de corde entre x et $x+dx$.
Dans le plan il y a deux composantes x, y.

<u>En x</u> $\quad \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ $\quad$ avec $m = \mu\, dx$.

μ = masse linéique $kg.m^{-1}$

→ $\vec{P}$ de la corde négligé

→ $\vec{T}_1$ tension à gauche

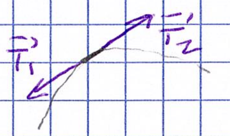
→ $\vec{T}_2$ tension à droite

$$\boxed{\vec{T}_1(x) + \vec{T}_2(x) = \mu\, dx \frac{d^2x}{dt^2}}$$

Les vecteurs $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ sont différents (sens, direction) mais on peut dire que leur norme est identique.

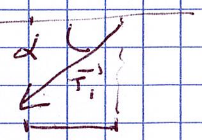
$dx \to 0$ ils sont de sens opposé sur la même direction et de même norme

Donc $\vec{T}_{x+dx}\,\vec{e_x} - \vec{T}_x\,\vec{e_x}$



$||\vec{T}_1|| = ||\vec{T}_2||$

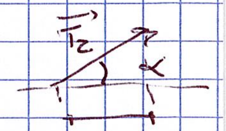
× Projection de $\vec{T}_x$ sur l'axe des x :



$$\cos\alpha = \frac{T_1(x)}{T_1} \Rightarrow T_1(x) = T_1 \cos\alpha$$

$T_1(x) = T_1$ approx petits angles

× Projection de $\vec{T}_{x+dx}$ sur l'axe des x :

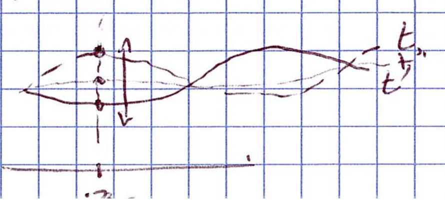


$$\cos\alpha = \frac{T_2(x)}{T_2} \Rightarrow T_2(x) = T_2 \cos\alpha$$

$T_2(x) = T_2$ approx petits angles

× Accélération selon x : la corde oscille mais ne se déplace pas selon x donc forcément

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$



Bilan en x : $T_1(x)\vec{x} + T_2(x)\vec{x} = 0$

$$T_1(x) = + T_2(x)$$

sur l'axe x pas à la position x.

Les normes sont égales => T_0

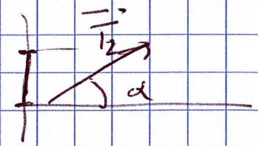
<u>En y :</u>

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\vec{T}_2 \, \alpha_{(x+dx)} - \vec{T}_1 \, \alpha_{(x)} = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$T_2 = T_1 = T_0$



$\sin\alpha = \frac{T(y)}{T_2}$

$T(y) = T_2 \sin\alpha$
$= T_2\alpha$

$$T_0\left(\alpha(x+dx) - \alpha(x)\right) = \mu \, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T_0 \underbrace{\frac{\alpha(x+dx) - \alpha(x)}{dx}} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T_0 \frac{d\alpha}{dx} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Problème on a une expression contenant α.

$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{dy}{dx}$ => on remplace pour avoir selon y

$$\boxed{T_0 \frac{d^2y}{dx^2} = \mu \frac{d^2y}{dt^2}}$$

Au final l'étude selon y permet de trouver le couplage spatio temporelle de la perturbation

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{d^2y}{dt^2}} = \text{D'Alembert.}$$

II Interprétation de l'onde :

⚠ $\partial \neq d$.

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

$\frac{\partial y}{\partial x}$: sous entendu "comment y varie selon x si je fixe t"

∂ car y dépend de $t|_x$

$\frac{dy}{dx}$: y ne dépend que de x

On remarque : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Terme d'inertie la masse (μ) est reliée au temps

On remarque $T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Terme d'élasticité. la tension est reliée à x et y.

Dimension des constantes : $\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}_{m^2} - \underbrace{\boxed{\frac{\mu}{T_0}}}_{\frac{1}{m^2/s^2}} \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}_{s^2} = 0$

$\Rightarrow$ d'où $\frac{T_0}{\mu} = \frac{m^2}{s^2}$

$\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \frac{m}{s}$ = Célérité. $\boxed{c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$

On remarque que selon t t ou $-t$ ne change rien dans l'équation $\Rightarrow$ réversibilité du temps.

Une solution ~~La solution~~ de l'équation de d'Alembert. les Est une onde plane progressive sinusoïdale

par les pensées

$$y^+(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$y^-(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \phi)$$

⚠

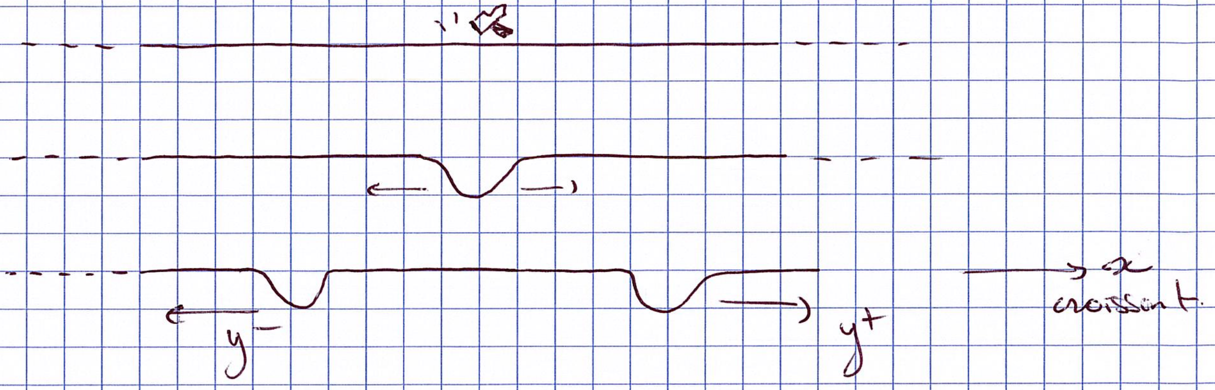
$$y(t,x) = y^+(x-ct) + y^-(x+ct) \qquad \left(c = \frac{x}{t}\right)$$

on privilégie l'espace

$$y(t,x) = Y^+\left(t-\frac{x}{c}\right) + Y^-\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

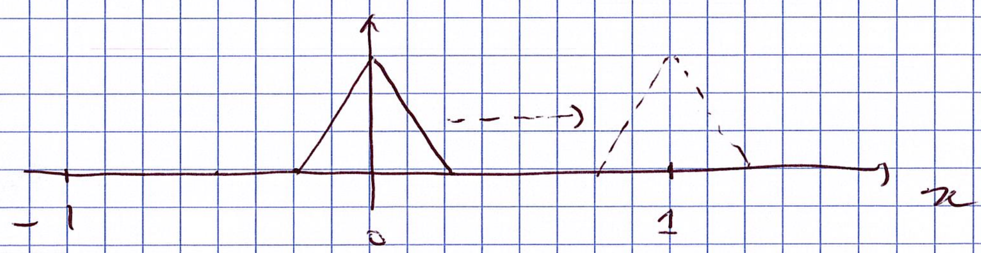
on privilégie le temps

Si on doit faire une analogie : avec 1 perturbation.



1 perturbation vers la droite + 1 vers la gauche.

Pour rappel :



$f(x)$ = triangle en $x=0$. Si la perturbation se déplace en 1 elle est toujours égale à $f(x)$ mais elle est décalée dans l'espace de $x = 1$.

Donc elle s'exprime comme "$f(x)$ en 0"

$$\underbrace{f(x)+1}_{\to \text{ en } 0} = \underbrace{f(x)}_{\text{en } 1} \Rightarrow f(0) = F \quad \text{alors} \quad f(x) = F-1.$$

Autrement dit je dois enlever 1 à $f(x)$ pour retrouver $f(0)$.

$$f^+(x) = y^+(x - \underbrace{ct}_{\text{distance parcourue par la perturbation en un temps } t})$$

$\boxed{\text{Solution onde progressive sinusoïdale} \quad y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)}$

Ici on retient.

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Solution : $\boxed{y(x,t) = y^{\oplus}(x-ct) + y^{\ominus}(x+ct)}$

$$\boxed{c = \frac{x}{t}}$$

On vérifie l'hypothèse (pas obligatoire) Tripatouillage Math

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

$$\underbrace{y(x,t)}_{F(u)} = y^+(\underbrace{x-ct}_{u}) + y^-(\underbrace{x+ct}_{v})$$

On peut étudier que y^+ car linéaire donc si y^+ est solution alors y^- est solution.

$$F(u) = F(x-ct) = y(x,t)$$

<u>En x:</u>

$$\frac{\partial y}{\partial x} = F'(u) \cdot 1.$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''(u) \cdot 1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \underbrace{F'} \cdot \frac{\partial (x-ct)}{\partial x}$$

Rappel: $y = (\underbrace{3x+2}_{u})^2$

$$y = u^2$$

Si on dérive y: $\frac{\partial y}{\partial u} = 2u.$

On doit aussi dériver u: $\frac{du}{dx} = 3$

donc dérivée de $\frac{\partial y}{\partial x} = (2u) \cdot 3$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}} \qquad = 2(3x+2) \cdot 3$$

<u>En t:</u>

$$\frac{\partial y}{dt} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$= F'(u) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x-ct)$$

$$= F'(u) \cdot (-c)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-c F'(u)\right)$$

$$= -c \frac{\partial}{\partial t} F'(u)$$

$$= -c\ F''u \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= -c\ F''u \cdot (-c)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 F''u}$$

On réunit les deux:

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 F''(u)$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''(u)$

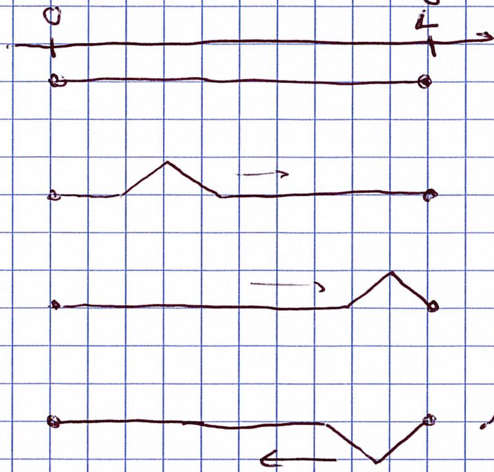
on voit bien $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$\Rightarrow$ d'Alembert vérifié pour ce type de solution

III Cas de la propagation non libre.

a) Guitare :

quand on pince la corde → déformation locale qui se propage mais pas infiniment !!



repos

corde pincée

propagation : $y(x,t) = F(x-ct)$

réflexion car fixée en L et en 0

$y(0) = 0$ et $y(L) = 0$

l'onde devient ~~y(x,t)=~~ $y(x+ct)$

L'onde devient alors $\underbrace{y(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)}$

onde progressive qui se déplacent compliqué à traiter avec les conditions aux limites.

Plan

On va étudier les que les formes autorisées or l'onde ne peut pas se propager hors des limites et f(~~x~~) doit être égales à 0 en $x = 0$ et L.

La forme des solutions sera un produit.

$$\boxed{y(x,t) = X(x) \cdot T(t)} \Rightarrow \text{donc d'Alembert.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t)\end{array}\right\} X''(x) \cdot T(t) - \frac{1}{C^2}\left(X(x) \cdot T''(t)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{C^2}\frac{T''}{T}$$

A droite ne dépend que de (t)
A gauche ——— de (x) | SEPARATION DES VARIAB.

La seule façon que ce soit vrai
(Si on dérive par x → cste $\frac{1}{C^2}\frac{T''}{T}$)
(Si on dérive par t → cste $\frac{X''}{X}$)

$$\frac{X''}{X} = k_1 \qquad \frac{T''}{T} = k_2$$

On peut même voir que $k_1 = k_2 = k^2$.

On obtient alors 2 Equa diffs :

$$X''_{(x)} + k^2 X_{(x)} = 0 \longrightarrow X_{(x)} = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

$$T''_{(t)} + \underbrace{C^2 k^2}_{\omega^2} T_{(t)} = 0 \longrightarrow T(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

solution

La Solution complète est le produit $X_{(x)} \cdot T(t)$

$$y(x,t) = \left[A\sin(kx) + B\cos kx\right] \cdot \left[C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)\right]$$

Avec les conditions aux limites : $x = 0 \quad y = 0$
sur la partie spatiale :

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \qquad X(x) = A\sin(kx)$$

$$y(L) = 0 \rightarrow A\sin kL = 0 \qquad X(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\sin kL = 0 \text{ quand } kL = n\pi \Rightarrow \boxed{k = \frac{n\pi}{L}}$$

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)\right]$$

$$y(x,t) \quad A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[C\cos(\omega t + \varphi)\right]$$

plutôt φ.

On prend le critère : Dans le cas d'une corde de guitare, on raisonne sur une onde stationnaire.

$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$\sin \frac{n\pi}{L} x \Longrightarrow$ fixe la forme spatiale dépend de x seulement donc une sinusoïde.
qui s'annule pour tout $x \frac{n\pi}{L} = 0, \pi$
$\left[x = 0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}\right]$ STATIONNAIRE.

$\cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow$ fixe l'oscillation dans le temps

Résumé de la stratégie :

① On ne raisonne pas sur une onde progressive $y(x,t) = y^+ + y^-$ mais sur le produit d'une fonction spatiale et temporelle

$y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ on sait que c'est une solution.

② On l'introduit dans l'équation de d'Alembert.
$\longrightarrow$ 2 équa diff découplées

③ On applique la solutions des 2 équadiffs aux conditions initiales.

④ On prend le critère.

Corde de guitare Thierry Reyer style

$$y(x,t) = y^+\left(t - \frac{x}{c}\right) + y^-\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

technique : x courant dinomo

//Rappel $\omega = ck$ // $c = \frac{\omega}{k}$

En complexe pour une sinusoïde $y^+ = \cos(\omega t - kx)$

$$\underline{Y}(x,t) = A_1 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} + A_2 e^{i\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)}$$

$$= e^{i\omega t}\left[A_1 e^{-\frac{i\omega x}{c}} + A_2 e^{+i\omega\frac{x}{c}}\right]$$

$\underline{Y}(t,0) = 0 = A_1 + A_2$

$\Rightarrow A_1 = -A_2$

$$= A_2 e^{i\omega t}\left[-e^{-\frac{i\omega x}{c}} + e^{\frac{i\omega x}{c}}\right]$$

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$$= A_2 e^{i\omega t}\left(2i\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)\right)$$

$$= 2i A_2 e^{i\omega t}\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

$Y(t,L) = 0$

$$\underbrace{2iA_2 e^{i\omega t}}_{=0\ ?}\ \underbrace{\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}_{=0\ ?} = 0$$

A_2 peut être égale à 0 pas le reste

pas intéressant devant le moment temporelle ou ouvert à 0 en x.

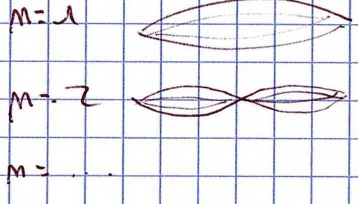
$\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$ si $\frac{\omega L}{c} = 0, \pi.$

$\omega = 2\pi f$

$$\frac{2\pi f L}{c} = n\pi$$

$$f = \frac{nc}{2L}$$

fréquence des modes propres de la corde par localisation



mais $\omega = ck$.

$\hookrightarrow \sin\left(\frac{\cancel{c}kL}{\cancel{c}}\right) = 0$

en fonction de ce qu'on veut.

$\hookrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0$

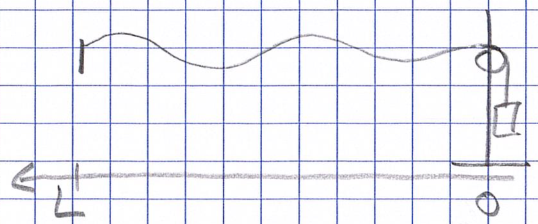
$k = \frac{\omega}{c}$

On n'a pas utilisé le produit $y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ ou d'Alembert.

(b) Cas de la corde de Melde

Dans ce cas on a non pas qu'une limite en $x=0$ et $x=L$ mais aussi une excitation sinusoïdale en $x=0$ du type $x_0 = A\cos(\omega t)$.

Astuce : Positionner l'excitateur en L et pas en 0.



$$\boxed{\begin{aligned} y^+(x,t) &= A\cos(\omega t - kx) \\ &= \text{onde progressive sinusoïdale } x \to + \end{aligned}}$$

Utiliser les complexes pour faciliter la situation

$\longrightarrow$ ~~Deux~~ ondes est tectonik progressive sinusoïdale

$$y(x,t) = y^+\left(t - \frac{x}{c}\right) + y^-\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\underline{Y}(x,t) = Y_1 e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} + Y_2 e^{i\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} \quad \text{complexe}$$

Rappel : $A e^{i\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right)} \equiv |A|\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right) + \overset{\text{négligé}}{\phi}\right)$

$$\equiv |A|\cos\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 x}{c}\right)$$

$$\equiv |A|\cos(\omega_0 t - kx)$$

$$\underline{Y}(x,t) = e^{i\omega t}\left[Y_1 e^{-\frac{i\omega x}{c}} + Y_2 e^{+\frac{i\omega x}{c}}\right]$$

Condition limite 1 : $x = 0$, $y = 0$ la manivelle bloque le mvt.

$$Y(0,t) = 0 \Longrightarrow Y_1 + Y_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{Y_1 = -Y_2}$$

$$\underline{Y}(x,t) = e^{i\omega t}\left[Y_1 e^{-\frac{i\omega x}{c}} - Y_1 e^{\frac{i\omega x}{c}}\right]$$

$$= Y_1 e^{i\omega t}\left[e^{-\frac{i\omega x}{c}} - e^{\frac{i\omega x}{c}}\right] \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

$$\underline{Y}(x,t) = Y_1 e^{i\omega t}\left[-2i\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)\right]$$

2^e condition limite en $x = L$

$y = A\cos(\omega t)$ excitateur

$\Rightarrow A e^{i\omega t}$

$$Y(L,t) = Y_1 \cancel{e^{i\omega t}}\left[-2i\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)\right] = A_0 \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$= Y_1 = \frac{A_0}{-2i\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}$$

$$Y(x,t) = \frac{A_0}{-2i\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)} e^{i\omega t}\underbrace{\left[e^{-\frac{i\omega x}{c}} - e^{\frac{i\omega x}{c}}\right]}_{-2i\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}$$

$$= A_0 e^{i\omega t}\frac{\cancel{+2i}\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}{\cancel{+2i}\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}$$

$$\boxed{Y(x,t) = A_0\cos(\omega t)\frac{\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}{\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)}} = A_0\cos(\omega t)\frac{\sin kx}{\sin kL}$$

On voit $\sin\frac{\omega L}{c} \Rightarrow \omega = k \times c$

$\sin kL \to 0$ $y(x,t)$ explose $\uparrow$

= mode de résonance

$kL = 0, n\pi \ldots$