Ondes électromagnétiques dans le vide

Equations de Maxwell :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 \qquad \mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Relation de la vitesse de propagation : $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

Équation de propagation : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$. Les solutions de cette équa° diff. sont des ondes planes progressives. Les surfaces d'ondes de l'OPP sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation.

On peut admettre que tte solution de l'équa° de propagation est une superposi° d'OPP dont les directions de propagation couvrent tout l'espace.

Une OPP se propageant dans le vide suivant $\vec{e_u}$ vérifie :

$$\vec{E}.\vec{e_u} = 0 \qquad \vec{B}.\vec{e_u} = 0 \qquad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e_u} \wedge \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{e_u}$$

$\vec{e_u}, \vec{E}, \vec{B}$ forme un trièdre direct.

Onde Progressive Plane Harmonique (OPPH) : cette onde est solution particulière de l'équa° de propagation

Caractéristiques d'une OPPH : pulsation : $\omega = 2\pi \nu$

longueur d'onde : $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$

nombre d'onde : $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

vecteur d'onde : $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e_u}$.

=> double périodicité : temporelle (période T) et spatiale (période λ).

Rmqs : les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses et vibrent en phase. Le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

On peut écrire : $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$.

Relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

Polarisation : Valeurs particulières de déphasage :

Si $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi \longrightarrow \frac{E_y}{E_x} = cte \Rightarrow \vec{E}$ garde une direction fixe au cours du temps.

↳ POLARISATION RECTILIGNE

Si $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ et si $E_{0x} = E_{0y} \rightarrow E_x^2 + E_y^2 = cte \Rightarrow$ Équation de cercle

↳ POLARISATION CIRCULAIRE

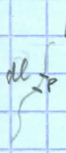
ELM.

Chapitre 1 : Le champ électriq.

Charge élémentaire e de valeur $|q_e| = 1,602.10^{-19}$ C
N'importe quel corps chargé contient un nbre entier de charges élémentaires : $|Q| = n|q_e|$

Densité de charges :

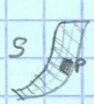
Linéique



$$Q(L) = \int_L \lambda(P)\, dl(P)$$

avec $\lambda(P) = \dfrac{\delta q(P)}{dl(P)}$ $C.m^{-1}$

Surfacique



$$Q(S) = \iint_S \sigma(P)\, dS(P)$$

avec $\sigma(P) = \dfrac{\delta q(P)}{dS(P)}$ $C.m^{-2}$

Volumique.

$$Q(V) = \iiint_V \rho(P)\, d\tau(P)$$

avec $\rho(P) = \dfrac{\delta q(P)}{d\tau(P)}$

Rmq : λ, σ, ρ sont indépendants du temps !

Loi de Coulomb : Expression de la force d'interac° (e) 2 particules chargées.

$$\vec{f}_{1\to2} = K \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \vec{u}_{12} \quad \text{avec } K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Champ électrique : Une charge ponctuelle Q génère partout ds l'espace (sauf en Q) un champ électrostatique E(M).

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times Q\, \vec{u_r}$$

Tout objet chargé M placé dans cette zone de l'espace est soumis à une force $f(M) = q_M \vec{E}(M)$

Principe de superposition : $\vec{E}_{\{q_i\}}(M) = \sum_i \vec{E}_{q_i}(M)$

Champ électrostatique créé par une distribution de charges :

Linéique

$$\vec{E}(M) = \int_L \frac{\lambda(P)\vec{u}_{PM}}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\, dl$$

Surfacique

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma(P)\vec{u}_{PM}}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\, dS$$

Volumique

$$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)\vec{u}_{PM}}{4\pi\varepsilon_0 (PM)^2}\, d\tau$$

Les symétries de la ddc vont générer la géométrie du champ $\vec{E}(M)$

Les invariances de la ddc vont simplifier les coordonnées de $\vec{E}(M)$

Règles de symétrie :

Le champ calculé au point M est $\subset$ dans le plan de symétrie de la ddc passant par M

Le champ calculé au point M est $\perp$ au plan d'antisymétrie de la ddc passant par M.

Règles d'invariance :

Lorsque la ddc est invariante par translation, le champ $\vec{E}(M)$ associé ne dépend pas de la coordonnée de translation.

Lorsque la ddc est invariante par rotation, le champ $\vec{E}(M)$ associé ne dépend pas des angles de la rotation.

Lorsque la ddc est invariante par rotation de centre O, le champ $\vec{E}(M)$ associé ne dépend que de la distance $r = OM$ au centre O.

ELM

Chapitre 2 : Potentiel électrique

Circulation du champ électrique : $\mathcal{C}_{AB}(\vec{E}(M)) = \int_A^B \vec{E}(M) . \vec{dl}$

Rappel $\vec{E}(M) : \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$

$\int_A^B \vec{E}(M)\,\vec{dl}(M)$ $\qquad dl(M) = dr\,\vec{u_r} + r d\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{u_\varphi}$.

Donc $\vec{E}(M)\,\vec{dl}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$. et $\mathcal{C}_{AB}(\vec{E}(M)) = \int_{r_A}^{r_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \left[\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$

$\Rightarrow \mathcal{C}_{AB}(\vec{E}) = V_A - V_B$ avec $V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$ et $V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$

⚠ Le potentiel électrostatique est toujours défini à une constante près !!

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

Principe de superposition :

distribu° discrète de charges $\quad V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$

⚠ M ne doit pas être à l'emplacement d'une charge !

distribu° continue de charges : $V(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)\, d\tau(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

$$\oint \vec{E}\,\vec{dl} = 0.$$

$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$

À connaître ! →

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques.
$E(x) = \frac{-\partial V}{\partial x}$	$E(r) = \frac{-\partial V}{\partial r}$	$E(r) = \frac{-\partial V}{\partial r}$
$E(y) = \frac{-\partial V}{\partial y}$	$E(\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$	$E(\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$
$E(z) = \frac{-\partial V}{\partial z}$	$E(z) = \frac{-\partial V}{\partial z}$	$E(\varphi) = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$

Surface équipotentielle : $\forall M \in (i)$, $V(M) = cte$

→ Le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire en tout point d'une surface équipotentielle.
→ $\vec{E}(M) \cdot \vec{dl} = 0$.

Distribution	$\vec{E}$	V
Volumique (ρ_0)	continue à la traversée de la surface	continu
Surfacique (σ_0)	discontinu	continu
Linéique (λ_0).	discontinu	souvent discontinu.

ELM

Électrostatique des conducteurs (à l'équilibre)

<u>Conducteur</u> : matériau porteur de charges libres
→ si on applique un champ $\vec{E}$, les charges se déplaceront.

Isolant : matériau non porteur de charges libres.

Équilibre d'un conducteur :

neutre & Isolé $\Longrightarrow$ $\rho = 0$, $\vec{E} = 0$, $V = K$ — $V = K$ dans tout le conducteur

isolé et chargé ⇔ apport de charges q : déplacem^t de l'équilibre

<u>À retenir</u> : à l'équilibre, les charges sont immobiles.

→ $\vec{F} = q \times \vec{E}$ mais $\vec{E} = 0$ dans le conducteur

<u>Si $\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$</u> : les charges ne sont pas à l'intérieur

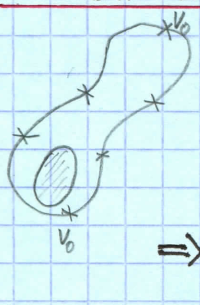
Rappel : surface équipotentielle. Donc $\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = V_A - V_B = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{dl} = \vec{0}}$.

$\vec{E}$ est $\perp$ au chemin (à la surface).

On en déduit que le volume du conducteur est une équipotentielle.

Champs et charges dans une cavité d'un conducteur

→ <u>$Q = 0$ dans la cavité</u>



Utilisa° du thm de Gauss

↳ $\oiint \vec{E}_n \, dS = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ car $dS \neq 0 \Rightarrow V_0 = K$

$\Longrightarrow$ <u>Dans une cavité vide de charges, V est constant, $E = 0$ et $\varnothing$ charges à la surface de la cavité.</u>

ELM

Dipôles électrostatiques $\vec{p} = q.\overrightarrow{NP}$

Polarisabilité : $\vec{p}_{induit} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$ Objets ~ nm jusqu'au mm sont polarisables.

Actions d'un champ extérieur sur un dipôle : - force
- moment.

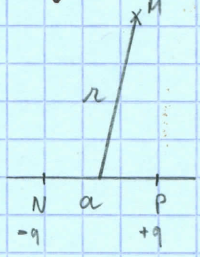
Cas à retenir : $\vec{E}_{ext}$ uniforme ($\vec{E_0}$)
$\vec{E}_{ext}$ variable (non uniforme, dépend de la posi°).

Énergie : $\mathcal{E} = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

Si le champ est uniforme : - $\vec{F} = \vec{0}$
- $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

Si le champ est non uniforme : $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$
$\vec{M} = \vec{p}\wedge\vec{E}$

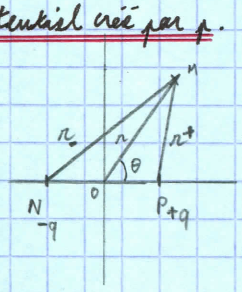
Rmq : $(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})(\vec{E}) = \left| \begin{array}{l} p_x \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \dfrac{\partial E}{\partial y} + p_z \dfrac{\partial E_x}{\partial z} \\ p_x \dfrac{\partial E_y}{\partial x} \quad \ldots\ldots \\ \vdots \end{array} \right.$



Approximation dipolaire : $a \ll r$

Moment dipolaire : $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$
↳ en C.m⁻¹

Potentiel créé par p.



V(M) s'exprime selon (r, θ)

→ Théorème de superposition : $V(M) = V_-(M) + V_+(M)$ avec $V_-(M) \to \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$ et $V_+(M) \to \dfrac{+q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}$

On a $r_-^2 = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{2ar}{2}\cos\theta$

$r_+^2 = r^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{2ar}{2}\cos\theta$

→ Utilisa° de l'A.D. ⇒ $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r^+} - \dfrac{1}{r_-}\right)$

Utilisa° de $(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x$ avec $x \ll 1$.

$\Rightarrow V(M) = \dfrac{q a \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ On a $p = q a \vec{u}$. $\Rightarrow V(M) = \dfrac{p \cdot \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Rmq : $V(M) = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ car $\dfrac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} = p \cos\theta$

Champ électrostatique créé par un dipôle.

Rappel : $V(M)$ s'exprime en 2D $\rightarrow (r;\theta)$.

On a $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V)$ $\Leftrightarrow \vec{E} \begin{cases} E_r = \dfrac{-\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ À connaître !

On a alors $\vec{E}(M) = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_r} + \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_\theta}$

Onde dans un diélectrique

Matériau diélectrique : polarisation sous l'effet d'un $\vec{E}$
↳ microsq avec conséquences macro.

Apparition d'une pop. statistiq de dipôles électriques lorsque le matériau se polarise.

Diélectrique : isolant mais $\vec{E}$ peut entrer à l'intérieur
↳ ∅ déplacement de charges

Vecteur polarisation : $\vec{P}$ (densité de moment dipolaire $\vec{p}$).

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = n^* \vec{p}$$ → Hypothèse : tous les $\vec{p}$ sont identiques

n^* : nbre de dipôles par unité de V

$\vec{P}$ caractéristique du matériau, déterminé par des modèles de polarisa° :

- $\vec{P}_{élec}$: déforma° du nuage élec sous l'ac° de $\vec{E}$
- $\vec{P}_{orient}$: orienta° des dipôles constitutifs $\vec{p}$ sous l'ac° de $\vec{E}$
- $\vec{P}_{ioniq}$: polarisa° des cristaux ioniq sous l'ac° de $\vec{E}$

$\vec{P}_{élec} + \vec{P}_{orient} + \vec{P}_{ioniq} = \vec{P}$

$\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$
↳ α : polarisabilité d'un atome

Equations de Maxwell dans un diélectrique (soumis à un champ EM variable) ∅ charges libres

→ densité volumiq de charges liées : $\vec{j}_{v_{liées}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$ $\quad$ $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad$ $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\mathrm{div}(\vec{D}) = 0$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

⇒ Modif sur le thm de Gauss : $\oiint_{S_G} \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q_{libre}$.

DLHI :

$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$ $[\chi_e]$ se réduit à $\chi_e(\omega)$ $\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}$

Rmq : $\chi_e(\omega) \geqslant 0$, $\vec{P}$ ds le m̂ sens que $\vec{E}$!
$\chi_e(\omega) = 0$ ds le vide

Vecteur déplacement élec. $\vec{D}$ ds un DLHI : $\underline{\vec{D}} = \underline{\varepsilon} \vec{E}$ $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi_e}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$.

ε_r : permittivité relative du DLHI
χ_e : susceptibilité élec
$\underline{\varepsilon}$: permittivité du DLHI

Equations de Maxwell dans un DLHI.

$$\mathrm{div}(\vec{D}) = \rho_{libres} \qquad \vec{\mathrm{Rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \qquad \vec{\mathrm{Rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{libres} \right)$$

Équation de propagation ds un DLHI ∅ chargé et isolant.

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Relation de dispersion : utilisa° du modèle des OPPM : $\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon_r} \frac{\omega^2}{c^2}$

Indice du milieu : $k_0 = \frac{\omega}{c}$ et $\underline{n} = \frac{\underline{k}}{k_0}$ $\underline{n} = n' + j n''$ $n' = \mathrm{Re}(\underline{n})$
$n'' = \mathrm{Im}(\underline{n})$

$$\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon_r}$$

Formules d'électromag à savoir !

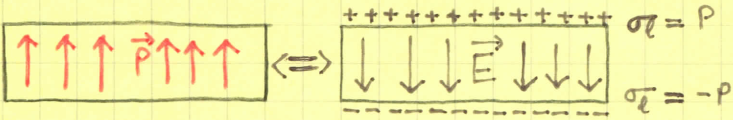
Potentiel d'un dipôle : $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

$$\frac{\vec{P}\cdot\vec{d}}{d^3} = \vec{P}\cdot\nabla_{r'}\frac{1}{d} = \nabla_{r'}\left(\frac{\vec{P}}{d}\right) - \frac{\nabla\vec{P}}{d} \qquad \text{avec } \vec{d} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_\Omega \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{d}}{d^3}\, dr'^3 \ \ldots\ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint_\Omega -\frac{\nabla\vec{P}(\vec{r}')}{d}\, dr'^3 + \oint\!\!\!\oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot d\vec{S}}{d}\right]$$

On définit : $\sigma_{liées}(\vec{r}) = P(\vec{r})\cdot\vec{n}$

$$\rho_{liées}(\vec{r}) = -\nabla\cdot\vec{P}(\vec{r})$$



Avec le thm de Gauss : $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

Rmq : $\vec{E}$ uniforme à l'intérieur de la plaque
$\vec{E} = \vec{0}$ à l'extérieur.

Déplacement électrique $\vec{D}$: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. $\Rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho_{libres}$

⚠ $\vec{D}$ ne dépend pas uniquement de ρ_{libres} car $\nabla\times\vec{D} = \nabla\times\vec{P} \neq 0$. Même si $\vec{P}$ est uniforme, la composante tangentielle de $\vec{P}$ peut être discontinue à l'interface de deux diélectriques.

Loi de Coulomb **non** valable pour $\vec{D}$: $\vec{D}(\vec{r}) \neq \frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\rho_{libres}(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}\, d^3r'$

NB : Si on a une symétrie plane, cylindrique ou sphérique, $\nabla\times\vec{D} = \vec{0}$, D peut être obtenu via la loi de Coulomb

Thm de Gauss pour $\vec{D}$: $\oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{libres}$

Pour les diélectriques linéaires, on a $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$

χ_e : susceptibilité électrique
∅ dimension.

Pour un matériau : $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1+\chi_e)\, \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

Dans un diélectrique <u>linéaire</u>, $\rho_{libres} \propto \rho_{liées}$:

$$\rho_{liées} = -\nabla \vec{P} = -\nabla(\varepsilon_0 \chi_e \vec{E}) = -\frac{\varepsilon_0 \chi_e}{\varepsilon} \nabla \vec{D} = -\left(\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\right) \rho_{libres}$$

Energie d'un diélectrique :

On a : $\delta W = \iiint_{\Omega} \delta \rho_{libres}(\vec{r})\, V(\vec{r})\, d^3r$. On a $\nabla \vec{D} = \rho_{libres} \Rightarrow \nabla \delta \vec{D} = \delta \rho_{libr}$

On réécrit : $\delta W = \iiint_{\Omega} \nabla(\delta \vec{D}(\vec{r}))\, V(\vec{r})\, d^3r$. ↓ $\nabla(\delta \vec{D} V) = \nabla(\delta \vec{D}) V + \delta \vec{D} \nabla V$

$$= \iiint_{\Omega} \nabla(\delta \vec{D}(\vec{r}))\, V(\vec{r})\, d^3r - \iiint_{\Omega} \delta D(\vec{r})\, \nabla V(\vec{r})\, d^3r$$

$$= \cancel{\oint_{\Sigma} \delta \vec{D}(\vec{r}) V(\vec{r})\, d\vec{S}} + \iiint_{\Omega} \delta \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\, d^3r$$

On a : $\delta D(\vec{r})$ décroît en $\frac{1}{r^2}$, $V(r)$ en $\frac{1}{r}$ et dS augmente en r^2. Le total fait $\frac{1}{r} \xrightarrow[r \to +\infty]{}$

Si le diélectrique est linéaire : $\delta \vec{D} = \varepsilon \delta \vec{E} \Rightarrow \delta \vec{D} \cdot \vec{E} = \varepsilon \delta(\vec{E}^2) = \frac{1}{2} \delta(\vec{D} + \vec{E})$.

On en déduit : $\delta W = \frac{1}{2} \delta\left(\iiint_{\Omega} \vec{D}(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r})\, d^3r \right) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})\, d^3r$.

Milieux magnétiques

Champ magnétique d'un courant permanent : Biot - Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

Théorème d'Ampère :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$$

Version locale :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B}\, \vec{dS} = \mu_0 \iint_{S} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

On a : $\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$

Définitions de A en 1D et 2D :

1D : $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr'$ 2D : $\vec{A}(\vec{r}) = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^2r'$

I : intensité du courant

K : densité surfacique de courant.

Résumé

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
 & \vec{j} \arrow[dl, shift right=2, "\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} d^3r'"'] \arrow[dr, shift left=2, "\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \text{ et } \nabla\cdot\vec{B} = 0"'] & \\
\vec{A} \arrow[ur, shift right=2, "\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}"'] \arrow[rr, shift right=2, "\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{B}(\vec{r}) \wedge (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} d^3r'"'] & & \vec{B} \arrow[ul, shift right=2, "\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} d^3r'"'] \arrow[ll, shift right=2, "\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} \text{ et } \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0."']
\end{tikzcd}$$