# Équations différentielles

Équation séparable : séparation des variables possibles. Ex : $y' = 2xy$.

## Équa diff linéaire du 1er ordre non-séparable

Méthodes :
- Variation de la constante
- Facteur intégrant.

### Variation de la constante

$y' = a(x)y + b(x)$.

Solution homogène : $y_0 = C e^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$. A= primitive de a.

Solution particulière : on définit $y_p = C(x) e^{A(x)}$

→ On dérive l'expression et on la réinjecte dans l'équa diff.
→ On intègre la relation obtenue pour avoir $C(x)$

### Facteur intégrant

$y' + a(x) y = b(x)$

On multiplie des deux côtés par $e^{\int a(x)dx}$

On retrouve l'expression :

$$\left(e^{\int a(x)dx} y\right)' = b(x) e^{\int a(x)dx}$$

→ On l'intègre et on retrouve l'expression de $y(x)$

## Équations exactes : $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

On cherche une fonction $f$ deux fois dérivable au moins tq :

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \implies M dx + N dy = df.$$

On doit avoir : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. On résout $df = 0$

$\Rightarrow f(x,y) = cte$

Si $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ⇒ facteur intégrant.

Comment trouve-t-on le facteur intégrant ?

$\Rightarrow$ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$. On cherche $\mu(x,y)$ tq :

$$[\mu(x,y) M(x,y)]\,dx + [\mu(x,y) N(x,y)]\,dy = 0.$$

$\Rightarrow$ On veut $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu N) \Rightarrow \mu \dfrac{\partial M}{\partial y} + M \dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \dfrac{\partial N}{\partial x} + N \dfrac{\partial \mu}{\partial x}$

D'où $\dfrac{d\mu}{\mu} = \underbrace{\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}}_{a(x)}$ en supposant que $\mu(x,y) = \mu(x)$

On a alors $\ln \mu = \displaystyle\int^{x} \ln x'\,dx' \Rightarrow \mu = e^{\int^{x} \ln x'\,dx'}$

Équations homogènes : $g(tx, ty) = t^{\alpha} g(x,y)$ avec $t > 0$.

## ED2 à coeffs constants $\varnothing$ 2nd membre :

$ay'' + by' + cy = 0.$ Solution $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$

On résout le polynôme caractéristique : $ar^2 + br + c = 0.$

$\Delta > 0$ : $r_1$ et $r_2$ réelles $\Rightarrow y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

$\Delta = 0$ : une solution + recherche d'une solution particulière du type $y_2 = u(x)\, y_1(x)$.
↳ solu°.

$\Delta < 0$ : $r_1$ et $r_2$ complexes $\Rightarrow y(x) = Ae^{(\alpha + i\beta)x} + Be^{(\alpha - i\beta)x}$

$$= e^{\alpha x}\left[Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}\right]$$

$$= e^{\alpha x}\, 2\,\mathrm{Re}\left[(\gamma + i\delta)(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))\right]$$

## ED2 à coeffs constants avec 2nd membre :

$ay'' + by' + cy = f(x)$ Résolu° de l'ED homogène puis solution particulière.

Solution : $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + y_p(x)$ $y_p(x)$ = solu° particulière

Comment trouver $y_p$ ?

Si $f(x)$ est un polynôme / exp / cos ou sin, on cherche $y_p(x)$ sous la forme d'un polynôme / exp / Acos + Bsin.

Polynôme : $y_p(x)$ est un polynôme de m̂ degré.

Exp : $y_p(x)$ est une exp de même exposant. Si $f(x)$ est solution de l'homogène, multiplier par x
$y_p(x) = x\, e^{kx}$

Trigo : $y_p(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$. Si $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$ solu° de l'homogène, on multiplie aussi par $x$.

Méthode de la variation des constantes : $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$.

On a $y_1(x)$ et $y_2(x)$ solu° de l'homogène. Avec $y_p(x)$ solu° particulière :

$y_p(x) = y_1 v_1(x) + y_2 v_2(x)$. On dérive et on impose $y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0$.

On a alors en dérivant une deuxième fois : $\begin{cases} v_1' y_1' + v_2' y_2' = f(x) \\ v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0. \end{cases}$

On trouve $v_1'$ et $v_2'$ et on intègre.

## ED 2 à coeff non constants :

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x) = 0$$

Méthode de la réduction d'ordre :

- On suppose qu'on connaisse une solu° $u(x)$. On cherche une 2ème solu° linéairement indépendante, $y(x) = u(x) v(x)$
- On dérive 2 fois et on réinjette dans l'ED :

$\Rightarrow v\,[au'' + bu' + cu] + a\,[2u'v' + uv''] + buv' = 0.$

- On fait le chgmt de variable : $z = v'$
  $\rightarrow$ on obtient une ED 1 séparable en $x$ et $z$.
- On résoud cette ED 1.

## Équations de Cauchy-Euler :

$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0.$ On cherche une solution de la forme $y(x) = x^k$.

$\Rightarrow$ On obtient : $x^k (ak^2 + k(b-a) + c) = 0.$

$\Delta > 0$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = Ax^{k_1} + Bx^{k_2}$

$\Delta = 0$, $y_1(x) = x^{k_0}$ et on cherche $y_2(x)$ tq $y_2(x) = u(x)\, x^k$

$\rightarrow$ on obtient une ED 1 et on a $y_2(x) = x^k [A \ln(x) + B]$.

$\Delta < 0$, $y(x) = Cx^{\rho + i\omega} + Dx^{\rho - i\omega} \underset{x^k = e^{k\ln x}}{=} x^\rho [\cos(\omega \ln x) + i \sin(\omega \ln x)].$

$y(x) \in \mathbb{R} \rightarrow y(x) \underset{D = C^*}{=} Cx^{\rho+i\omega} + C^* x^{\rho - i\omega} = 2\,\mathrm{Re}\,[Cx^{\rho + i\omega}].$

On a finalement avec $C = \alpha + i\beta$, $A = 2\alpha$ et $B = -2\beta$.

$$y(x) = x^\rho [A \cos(\omega \ln x) + B \sin(\omega \ln x)]$$