# Chapitre 1 : Hydrostatique

Unité de P : $Pa = N.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-2}$

n orienté vers l'ext.

Force exercée à travers dS par le fluide sur le solide : $d\vec{F} = -P \times dS \times \vec{n}$

Equation fondamentale de l'hydrostatique :

Fluide au repos ou uniformément accéléré, dans un champ de gravité $\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$.

$d\vec{F} = \left[-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}\right]dV$. $\Rightarrow$ PFD : $\left[-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g}\right]dV = m\vec{a} = \rho dV \vec{a}$.

(Forme locale : $-\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} = \rho\vec{a}$.

Force hydrostatique sur une surface immergée S :

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F} = \iint_S -P\,\vec{n}\,dS.$$

Cas particulier d'une surface fermée :

$$\vec{F} = \oiint_S -P\,\vec{n}\,dS = -\iiint_V \vec{\nabla}P\,dV$$

Fluide au repos : $-\nabla P + \rho\vec{g} = 0$ $\quad \vec{F} = -g\iiint_V \rho\,dV = -m\vec{g}$.

↳ relatif au fluide et non au solide !

Pour les fluides incompressibles ($\rho$ = cte)

$$P(z) = P_0 + \rho g(z_0 - z) = P_0 + \rho g h.$$

Pour les fluides compressibles :

- Gaz parfait : $\rho = \frac{PM}{RT}$ d'où $P(z) = P(z=0)\,e^{\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)}$ en isotherme

# Chapitre 2 : Tension de surface

Tension de surface → I.e.I $\varphi$ condensée et un gaz
Tension interfaciale → I.e.I 2 $\varphi$ condensées.

$\neq$ de P sur une surface courbe : $\Delta P = \gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

$N.m^{-1} = J.m^{-2}$

⇒ Surface du fluide sous tension : $\delta F = \gamma \delta L$ ⇒ $\gamma = \frac{\delta F}{\delta L} = \frac{\delta W}{\delta A}$

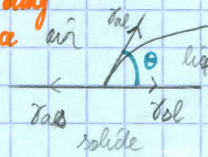
Energie plus élevée des molécules à la surface : $\delta W = \gamma \delta A$

$\gamma_{eau} = 0{,}072\ N.m^{-1}$

Pression de Laplace : $\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$

Equation de Young-Laplace

Sur l'axe horizontal : $\boxed{\gamma_{as} = \gamma_{sl} + \gamma_{al} \cos\theta}$




Surface hydrophobe : $\cos\theta < 0$ → $\gamma_{as} < \gamma_{sl}$
Surface hydrophile : $\cos\theta > 0$. → $\gamma_{as} > \gamma_{sl}$

Cas particuliers : $\cos\theta = 0$ $\gamma_{as} = \gamma_{sl}$ (eau sur argent)

$\cos\theta = -1$ $(\theta = 180°)$ $\gamma_{as} + \gamma_{al} = \gamma_{sl}$

Si $\gamma_{sl} > \gamma_{as} + \gamma_{al}$ → démouillage total (eau sur PTFE)

Si $\gamma_{as} > \gamma_{al} + \gamma_{sl}$ → mouillage total (eau sur verre propre).

Nombre de Bond (pour une gouttelette déposée sur un substrat) : $B_0 = \frac{\Delta P_{gravité}}{\Delta P_{capillaire}}$

Si r est une dimension caractéristique du système : $B_0 \simeq \frac{\rho g r^2}{\gamma} \simeq \frac{r^2}{a^2}$ avec $a = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$

longueur caractéristiq pour les effets de tension de surface

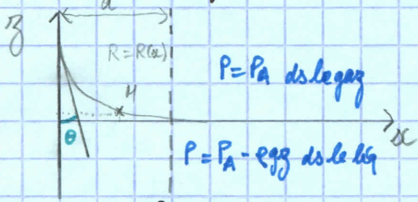
Si $B_0 \ll 1$ $a \gg r$ effets de tension l'emportent
→ goutte reste quasiment sphérique.

Si $B_0 \gg 1$ $a \ll r$ effets de la gravité l'emportent
→ aplatissement de la goutte.

Angle de contact $\theta$ ne dépend que de $\gamma$
pas du nombre de Bond!

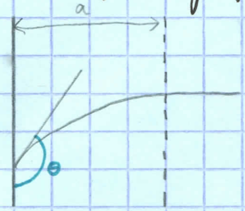
Cas d'une surface solide verticale

Surface hydrophile




$90° > \theta$

Surface hydrophobe.




$\theta > 90°$

Loi de l'hydrostatique et équation de Laplace:

Si $x \gg a$ : $R \to +\infty$  $\Delta P = 0$ , $z = 0$  a: longueur capillaire

si $x < a$  $\Delta P \neq 0$ , $z \neq 0$

$\Delta P = P_A - (P_A - \rho g z) = \rho g z = \frac{\gamma}{R(x)}$ => P plus grande ds l'air au niveau du rayon de courbure que ds le liquide.

Cas d'une surface cylindrique verticale

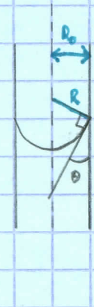
Fluide dans un capillaire de diamètre intérieur $R_0$ : 2 cas limites.

$R_0 \gg a$ et $R_0 \ll a$. (La gravité n'a pas d'influence sur la forme de la surface libre)

$R = \frac{2\gamma}{\rho g z} = \frac{2\gamma}{\rho g h}$ pour une surface libre sphérique.

Relation entre R et $R_0$ (surface libre sphérique).

$\frac{R_0}{R} = \cos\theta$  Équation de Jurin: $h = \frac{2\gamma}{\rho g R} = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g R_0}$




Pour un couple liq/sol donné : $\gamma$ et $\cos(\theta)$ sont fixés par la thermodynamique

→ Si $R_0 \nearrow$, $h \searrow$ (et inversement)

$\cos\theta > 0$ → surface hydrophile  $\cos\theta < 0$ → surface hydrophobe.

# Chapitre 3 : Cinématique des fluides

**Ecoulement stationnaire** : la vitesse ne change pas au cours du temps en un point.
⇒ trajectoire et lignes de courants confondues

Description du champ de vitesses : $\vec{v} = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z}$.

Méthode eulérienne : $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$ ou $\vec{v} \cdot \begin{cases} v_x = v_x(x,y,z,t) \\ v_y = v_y(x,y,z,t) \\ v_z = v_z(x,y,z,t) \end{cases}$

→ Placements à $t$, on prend une photo / placement. Si champ stationnaire : même photo.

Méthode lagrangienne : $\vec{v} = \vec{v}(x_0, y_0, z_0, t)$ ou $\begin{cases} v_x = v_x^*(x_0, y_0, z_0, t) \\ v_y = v_y^*(x_0, y_0, z_0, t) \\ v_z = v_z^*(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$

⇒ $x_0, y_0, z_0$ : coordonnées d'une particule de fluide donnée à $t=0$.

→ Fixa° d'1 particule à $x_0, y_0, z_0$ à $t=0$, et on suit l'évolution de sa vitesse au cours du temps.

$\frac{D\vec{v}}{Dt}$ : évolution de la vitesse <u>de la particule</u> au cours du temps $\qquad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ : évolution de la vitesse <u>en un point de l'espace</u> au cours du temps

$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \neq \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

Vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$

Ecoulement irrotationnel → $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

PFD pour un fluide parfait ($\eta = 0$) : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P$

Expressions des débits massique et volumique à travers une surface orientée S.

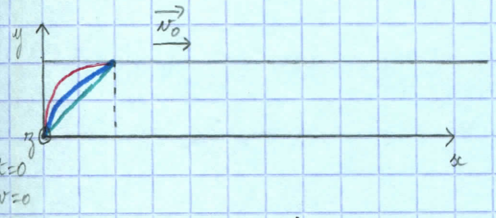
$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (m^{-3} s^{-1})$

$D_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \quad (kg.s^{-1})$

Forme locale de l'équation de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

→ écoulement stationnaire : $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$
→ écoulement incompressible à $\rho$ uniforme : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

# Chapitre 4 : Notions sur la viscosité.




temps très court
temps plus long
régime stationnaire

$\vec{v} \begin{vmatrix} v_x(y,t) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

PFD : $\underbrace{\rho\vec{a}}_{\text{selon } \vec{e_x}} = \underbrace{\rho\vec{g} - \vec{\nabla}P}_{\text{selon } \vec{e_z}}$ ⇒ Problème !

→ ∃ force de frottements visqueuse F.

$$\vec{F} = \eta S \frac{dv_x}{dz} \vec{e_x}$$

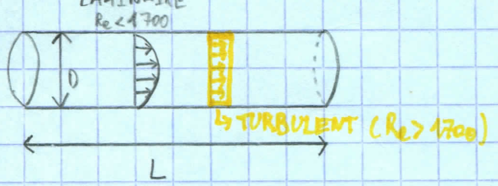
Si écoulement stationnaire avec gradient uniquement de pression hydrostatique :

$$\vec{F} = \eta S \frac{v_0}{h} \vec{e_x}$$

⇒ Bilan des forces visqueuses : - sur une couche d'épaisseur $dz$ : $\sum \vec{F} = S\,dz\,\eta \frac{\partial^2 v_x}{dz^2} \vec{e_x}$

- sur un volume $dV$ : $\sum \vec{F} = S\,dV\,\eta\,\nabla^2 \vec{v}$.

Equation de Navier-Stokes (PFD pour fluide visqueux) : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P + \underbrace{\eta \nabla^2 \vec{v}}_{=0 \text{ si fluide parfait}}$




$R_e = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta} = \frac{\bar{v} D}{\nu}$ → écoulement dans une conduite

$R_e = \frac{\rho v L}{\eta}$ → écoulement autour d'un obstacle

Forces de traînée sur une sphère de rayon R :

LAMINAIRE : $F = 6\pi\eta R v$

TURBULENT : $F = \frac{1}{2}\rho v^2 (\pi R^2) C_\infty$    $C_\infty$ est adimensionnel.

# Chapitre 4 : Équations d'Euler et de Bernoulli

## I) Equation d'Euler

$\Sigma =$ glob. fluide $(dV, dm, \vec{a})$

NLII : $dm\,\vec{a} = \sum d\vec{F}$ avec $\sum d\vec{F}$ : • $-\vec{\nabla}P\,dV$ ⌀ de force de viscosité.
– $dF$

$$\rho\vec{a} = -\vec{\nabla}.P + \frac{dF}{dV}$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{v}$$

Équation d'Euler : $\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}P + \frac{d\vec{F}}{dV}$

$\rho =$ cte (incompressibilité)

$$div(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = \vec{0} \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

$\rho \neq$ cte (compressibilité)

Force liée à la pesanteur : $dF_m = \rho\,dV\,\vec{g}$

$$\Rightarrow \frac{dF_m}{dV} = -\rho(\vec{\nabla}g.z)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(P) - \nabla(gz)$$

## II) Equations de Bernoulli

Hypothèse à appliquer $\forall$ = $^o$ de Bernoulli : réf. galiléen.

1ère équation :

Hypothèses :
- statiomarité de l'écoulement $\rightarrow \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$
- incompressibilité du fluide $\rightarrow (\rho = cte)$
- irrotationnalité de l'écoulement $\rightarrow (\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) = \vec{0}$
- homogénéité du fluide $\rightarrow$ pptés du fluide applicables partout.

$$\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho} + gz\right) \Leftrightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = 0$$ → Vrai tout le temps !

$$\Rightarrow \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = cte$$ ($v = 0 \Rightarrow$ statique des fluides).

2ème équation :

Hypothèses : statiomarité de l'écoulement
incompressibilité et homogénéité du fluide.

Introduction de $d\vec{M}$.

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right) \Rightarrow (\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}\;\vec{dM} = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right).\vec{dM}.$$

On intègre entre 2 pts d'une même ligne de courant

$$\int_A^B (\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}\;\vec{dM} = \int_A^B -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right)\vec{dM}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \int_A^B -d\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right) \Rightarrow \frac{v_A^2}{2}+\frac{P_A}{\rho}+gz_A = \frac{v_B^2}{2}+\frac{P_B}{\rho}+gz_B.$$

3ème équation

Hypothèses : - irrotationnalité de l'écoulement
- incompressibilité et homogénéité du fluide

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right) = \vec{0}$$

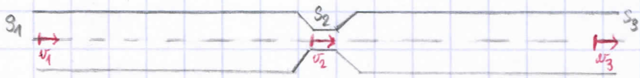
Introduction de $\phi$ : $\vec{v} = \vec{\nabla}(\phi)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi)+\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right) = 0$$ Vrai en tt pt de l'espace !

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz = cte$$ Si $\phi$ irrotationnalité $\rightarrow$ valable sur 1 ligne de courant.

Effet Venturi



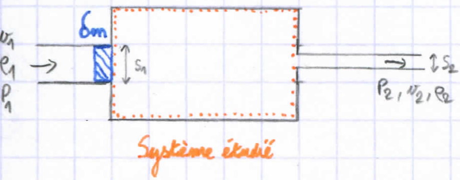

Hypothèses : fluide parfait, incompressible et homogène et écoulement stationnaire.

$$D_{m_1} = D_{m_2} \Leftrightarrow \rho D_{v_1} = \rho D_{v_2} \Leftrightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2$$

2ème équation de Bernoulli : $\frac{P_1}{\rho}+\frac{1}{2}v_1^2 = \frac{P_2}{\rho}+\frac{1}{2}v_2^2 \qquad P_2 = P_1+\rho\left[\frac{1}{2}v_1^2-\frac{1}{2}v_2^2\right].$

# Chapitre 5 : Bilans macroscopiques en régime stationnaire

## Bilan sur $\Sigma$ ouvert et fixe




$$\left.\begin{aligned} &\text{à } t : m(t) \\ &\text{à } t+dt : m(t+dt) \end{aligned}\right\} dm = m(t+dt) - m(t).$$

$$\delta m = \delta m_1 - \delta m_2 = dm$$

$$= \rho_1 \delta V_1 - \rho_2 \delta V_2$$

$$= \rho_1 v_1 \, dt \, S_1 - \rho_2 v_2 \, dt \, S_2 .$$

Fluide parfait

Régime stationnaire : $m(t+dt) = m(t)$

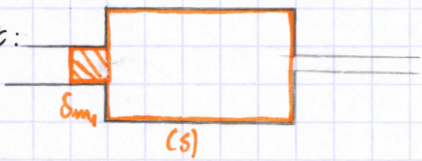
$$\delta m_1 = \delta m_2$$

$$\rho_1 v_1 S_1 dt = \rho_2 v_2 S_2 dt$$

$\Rightarrow \quad D_{m_1} = D_{m_2} = cte \qquad$ Avec $\rho = cte \Rightarrow D_{v_1} = D_{v_2}$.

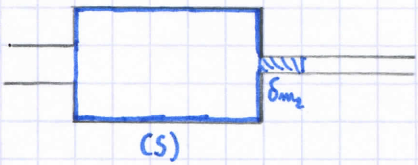
## Bilan sur $\Sigma$ fermé et déformable.

À $t$ :




$$S^*(t) = S(t) + S^{\delta m_1}$$

À $t+dt$ :




$$S^*(t+dt) = S(t+dt) + S^{\delta m_2}$$

$$m^* = m + \delta m$$

$$m^*(t) = m(t) + \delta m_1$$

$$m^*(t+dt) = m(t+dt) + \delta m_2$$

$$m^*(t) = m^*(t+dt) \Leftrightarrow m(t) + \delta m_1 = m(t+dt) \; \delta m_2$$

Bilan EPSA ( Entrée + Production = Sortie + Accumulation ).

$\Sigma$ ouvert : $\rho_1 v_1 S_1 + 0 = \rho_2 v_2 S_2 \frac{Dm}{Dt}$ $\qquad \frac{Dm}{Dt} = 0$ si régime stationnaire.

$\Sigma$ fermé : $\emptyset$ entre, sort et produit.

$$\Rightarrow 0 + 0 = 0 + \frac{Dm^*}{Dt} \quad \Leftrightarrow \quad m^* = cte$$

$$m^*(t+dt) = m^*(t)$$

$$m(t) + \delta m_1 = m(t+dt) + \delta m_2$$

Or $m(t) = m(t+dt) \Rightarrow \delta m_1 = \delta m_2$

Pour une grandeur extensive $G \neq$ masse ($\vec{p}$, $\vec{L_O}$, Ec ou Eint, S).

$$G^*(t+dt) - G^*(t) = G(t+dt) + \delta G_2 - [G(t) + \delta G_1]$$

$$= [G(t+dt) - G(t)] - [\delta G_1 - \delta G_2]$$

$$= [G(t+dt) - G(t)] - \delta G_e.$$

$$\Rightarrow dG = dG^* + \delta G_e.$$