

Physique quantique

Préparation aux écrits de physique - agrégation interne

Cédric Enjolras

Table des matières

I Confrontation entre la mécanique classique et l'expérience

1. Mécanique classique
2. Effet photo-électrique, nécessité de la notion de photon
 - 2.a. Dispositif expérimental
 - 2.b. Observations
 - 2.c. Interprétation
 - 2.d. Conclusion, relations de Planck-Einstein
3. Onde de matière : interférence d'onde de matière
 - 3.a. Dispositif expérimental
 - 3.b. Observations
 - 3.c. Interprétation
 - 3.d. Conclusion, dualité onde-corpuscule

II Fonction d'onde et inégalité de Heisenberg

1. Notion de fonction d'onde
 - 1.a. Nécessité
 - 1.b. Densité de probabilité
 - 1.c. Interprétation de l'expérience d'interférence d'atomes froids
2. Inégalité de Heisenberg spatiale
 - 2.a. Idée
 - 2.b. Illustration expérimentale
 - 2.c. Résultat issu de la mécanique quantique

III Particules confinées

1. Cas général
2. Exemple de l'oscillateur harmonique quantique
 - 2.a. Impossibilité du repos
 - 2.b. Estimation de l'énergie minimale
3. Particule libre confinée 1D, puits rectangulaire infini

I Confrontation entre la mécanique classique et l'expérience

1. Mécanique classique

Vers la fin du XIX^e siècle et le début du XX^e, les physiciens utilisent la mécanique (Newton) et l'électromagnétisme (Maxwell). Ces deux théories suffisent à expliquer presque tous les phénomènes observés à l'époque et il ne restait donc que quelques points de "détails" à comprendre. Parmi ces quelques points on peut citer :

- le spectre du soleil (intensité lumineuse en fonction de la longueur d'onde) ou d'un autre corps chaud (lampe à incandescence)
- l'existence de matériaux supra-conducteurs à très basses températures
- l'effet photo-électrique (Cf plus loin)
- l'évolution des capacités calorifiques des solides avec la température pour les températures qui tendent vers 0 K

Remarque : la mécanique classique est dite **déterministe**, c'est-à-dire que pour des conditions initiales données, on peut en théorie calculer avec certitude l'évolution temporelle du système.

On distingue généralement deux types d'objets en mécanique classique :

- les particules (balle de tennis, neutron, électron ...) qui ont des trajectoires bien définies,
- les ondes (son, vague, lumière ...) qui diffractent lorsqu'elles passent à travers un diaphragme dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde et peuvent interférer.

2. Effet photo-électrique, nécessité de la notion de photon

2.a. Dispositif expérimental

Figure ci-dessous.

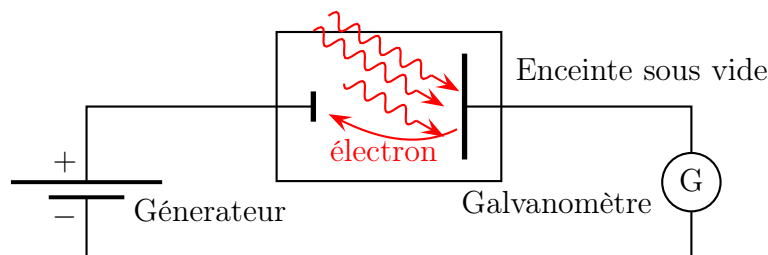


FIGURE 1 – Effet photo-électrique : dispositif

- Deux plaques de métal sont placées face à face dans une enceinte sous vide.
- On a la possibilité d'envoyer de la lumière (ou plus généralement un rayonnement électromagnétique) sur l'une des surfaces.
- Les deux plaques sont connectées à un générateur de tension qui porte l'une des plaques métalliques à un potentiel négatif (celle qui sera éclairée) et l'autre à un potentiel positif afin d'attirer des électrons éventuellement extraits de la plaque en face.
- On utilise un galvanomètre qui est un ampèremètre permettant de détecter de très faibles courants, d'intensité I_G .

2.b. Observations

On constate que :

- Si l'on n'éclaire pas la plaque, le courant mesuré est à peu près nul, au bruit près.
- Lorsqu'on éclaire la plaque en lumière blanche, un courant faible apparaît.

Jusque là, rien n'était surprenant pour les physiciens : les électrons absorbent l'énergie de la lumière incidente et lorsqu'ils ont atteint une énergie suffisante (appelée travail d'extraction), il peuvent s'échapper de la plaque éclairée et être récupérés par l'autre plaque métallique.

Curieux, les physiciens éclairent en lumière monochromatique pour voir l'influence de la radiation (couleur) tout en faisant varier l'intensité lumineuse. Les observations sont les suivantes :

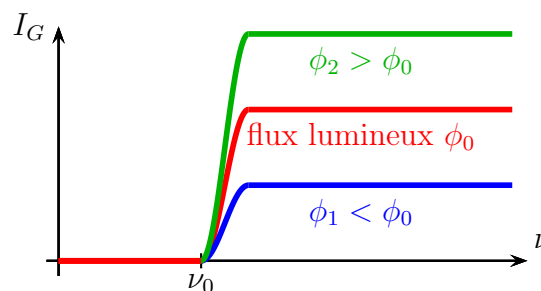


FIGURE 2 – Effet photo-électrique en lumière monochromatique

- Lorsque la fréquence utilisée est trop faible (ou la longueur d'onde trop élevée), on observe le même signal qu'en absence de lumière, une intensité nulle, et ce quelque soit l'intensité lumineuse.
- Lorsque la fréquence est supérieure à **une fréquence seuil** ν_0 (qui dépend du matériau), un courant électrique (déplacement d'électrons) est détecté par le galvanomètre il augmente avec l'intensité lumineuse incidente.

La présence d'une fréquence seuil en dessous de laquelle aucun électron n'est arraché n'est pas explicable à l'époque avec l'électromagnétisme tel qu'il est connu.

On s'attendrait en effet à ce que, quelle que soit la couleur de la lumière, on puisse extraire les électrons en augmentant simplement l'intensité lumineuse.

2.c. Interprétation

Elle est proposée par Einstein de 1905 et jouera un rôle important dans l'attribution de son prix Nobel en 1921.

Pour lui, la lumière est constituée de "grains de lumières" que l'on appelle **photons**.

Ils ont une énergie qui dépend de la fréquence lumineuse et une masse nulle.

- Augmenter l'intensité lumineuse (à couleur fixée) correspond donc simplement à augmenter le nombre de grains incidents mais si la fréquence lumineuse est trop faible, aucun photon n'a d'énergie suffisante pour extraire un seul électron.
- Par contre lorsqu'un grain a une énergie suffisante et qu'il rentre en collision avec un électron, il peut arriver à l'extraire. L'électron doit acquérir suffisamment d'énergie en une seule fois. On appelle travail d'extraction W_{ext} cette énergie minimale à apporter à l'électron pour l'extraire, lorsqu'il se trouve "à la surface" du métal.
- On fait donc apparaître ν_0 la fréquence en dessous de laquelle on n'observe pas de courant.

D'autres expériences montrent qu'en plus de l'énergie, le photon transporte une quantité de mouvement \vec{p} (impulsion) non nulle bien que sa masse soit nulle, la relation de la mécanique classique $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ ne lui est pas applicable.

2.d. Conclusion, relations de Planck-Einstein

Relations de Planck-Einstein : la lumière est constituée de particules **de masse nulle** nommées **photons** qui se déplacent à la vitesse de la lumière. On peut associer à ces particules une énergie E et une impulsion \vec{p} (quantité de mouvement) qui dépendent de **la fréquence** ν du rayonnement ou de son vecteur d'onde \vec{k} :

$$E = h\nu \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Ce sont les relations de **Planck-Einstein**.

h est **la constante de Planck** et a pour valeur numérique $6,62606957 \cdot 10^{-34}$ J.s, on utilise aussi fréquemment la constante **de Planck réduite** $\hbar = \frac{h}{2\pi} \sim 10^{-34}$ J.s
L'ordre de grandeur de la constante de Planck doit être connu.

Remarque : si un photon est porteur de $E = h\nu > W_{\text{ext}}$ et entre en collision avec un électron, il va, en plus de l'extraire, lui conférer une énergie cinétique

$$E_c = h\nu - W_{\text{ext}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - h\nu_0$$

avec v la vitesse de l'électron après extraction et ν_0 la fréquence en dessous de laquelle on n'observe pas de courant.

Application directe : évaluer l'énergie typique d'un photon dans le domaine visible. Quel est le nombre de photons émis par seconde par une ampoule de puissance lumineuse 100 W ?

$\nu \simeq 10^{14}$ Hz $\Rightarrow E \simeq 7 \cdot 10^{-20}$ J, ainsi pour une ampoule de puissance 100 W (c'est-à-dire 100 J/s) émet $\frac{10^2}{7 \cdot 10^{-20}} \simeq 10^{21}$ photons par seconde.

3. Onde de matière : interférence d'onde de matière

3.a. Dispositif expérimental

En 1992, une équipe de chercheurs japonais a réalisé l'expérience suivante :

- Ils ont rendu immobiles des atomes de néon en utilisant une technique de **refroidissement LASER**. On relie refroidissement et vitesse car la température dépend de la vitesse des particules lorsque le mouvement est désordonné.
- Une fois les atomes immobilisés, ils sont laissés en chute libre au-dessus d'une plaque percée de deux fentes extrêmement fines (voir figure ci-dessous) séparées par une distance de $d = 6 \mu\text{m}$. Lors du passage par les fentes, la vitesse des atomes est d'environ 2 m.s^{-1} .
- On observe ensuite les impacts des atomes sur un écran placé $D = 85$ cm sous les fentes.

Simulation informatique : Python - interferences-atomes-froids

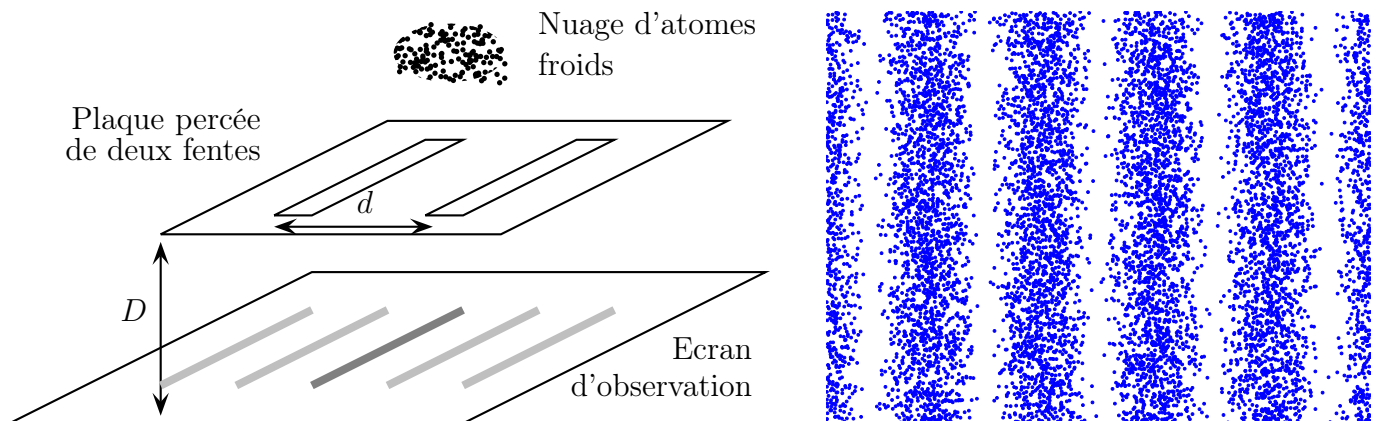


FIGURE 3 – Interférence d'ondes de matière : dispositif et résultats.

3.b. Observations

- On observe sur l'écran un impact clairement localisé à chaque fois qu'un atome tombe (un point lors de la simulation). Ceci correspond à l'aspect corpusculaire de l'atome et n'est absolument pas surprenant.
- Lorsque l'on observe tomber un petit nombre d'atomes, les points d'impact semblent répartis de façon aléatoire. En mécanique classique, on s'attend à voir une forte concentration des impacts à la verticale des fentes.
- Pour un grand nombre d'atomes, les impacts se concentrent sur des bandes parallèles aux fentes et forment une figure similaire à ce que l'on peut observer en réalisant de la diffraction d'un faisceau laser par une bi-fente ou celle qu'on a observée en TP avec les ondes ultrasonores.

Expérience : Diffraction et interférence par une bi-fente - Laser vert, fente, bi-fente et écran

3.c. Interprétation

Lors du passage par les fentes, les atomes ont un comportement typique d'une onde : **diffraction et interférence**.

Remarques :

- Historiquement, l'expérience citée est arrivé assez tard et la théorie existait déjà, mais elle représente une prouesse technique et est souvent présentée car son interprétation est plus facile que les expériences originelles.
- Une animation est visible à l'adresse <http://www.toutestquantique.fr/#dualite>

Video : Dualite-fr.mp4

3.d. Conclusion, dualité onde-corpuscule

Nous avons déjà vu lors de l'étude de l'effet photo-électrique qu'une onde pouvait présenter un comportement **corpusculaire**.

Ici, il s'agit d'atomes, généralement considérés comme des corpuscules, et qui présentent un aspect **ondulatoire**.

On parle de "dualité onde-corpuscule" : ce que l'on considérait en mécanique classique comme une onde peut présenter un aspect corpusculaire et vice-versa.

Relation de de Broglie (Louis de Broglie, physicien français, prononcer "de breuil") : toute particule peut avoir un comportement ondulatoire . À une particule d'impulsion \vec{p} on peut associer une onde de vecteur d'onde \vec{k} telle que

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

L'onde a pour longueur d'onde λ telle que $p = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

et sa direction de propagation est la direction du vecteur impulsion.

Remarques :

- Les phénomènes quantiques apparaissent lorsque les distances mises en jeu sont de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie
- La longueur d'onde est d'autant plus importante que l'impulsion des objets est faible , ce qui explique qu'il ait fallu refroidir les atomes de néons avant de les faire interférer.

Application directe : estimer la longueur d'onde de de Broglie pour une balle de tennis (60 g) au service (200 km/h) puis pour un électron se déplaçant à 10^5 m.s^{-1} . Allez-vous diffracter en passant la porte en marchant ?

- Balle de tennis au service : $p = m.v \simeq 0,06 \times 200/3,6 \simeq 3 \text{ kg.m.s}^{-1}$ donc $\lambda = 6,6.10^{-34}/3 \simeq 2.10^{-34} \text{ m}$. Impossible de la faire passer dans une ouverture de cette taille donc pas de diffraction pour une balle de tennis!
- Electron : $p = m.v \simeq 10^{-30}.10^{-5} \simeq 10^{-25} \text{ kg.m.s}^{-1}$ donc $\lambda = 6,6.10^{-34}/10^{-25} \simeq 7.10^{-9} \text{ m}$ ce qui est un peu plus grand que la distance inter-atomique ($\sim 10^{-10} \text{ m}$) mais on peut donc faire de la diffraction d'électrons par un réseau cristallin.
- Pour un élève passant la porte $p = mv \simeq 60 * 2 = 120 \text{ kg.m/s}$ donc $\lambda = 6,6.10^{-34}/120 \simeq 10^{-35} \text{ m}$, bien trop faible pour diffracter.

II Fonction d'onde et inégalité de Heisenberg

1. Notion de fonction d'onde

1.a. Nécessité

Les expériences présentées précédemment montrent qu'il faut changer la manière de décrire les systèmes physiques lorsque les phénomènes quantiques ne sont pas négligeables. En particulier,

- la mécanique quantique est intrinsèquement **probabiliste et non plus déterministe** : dans l'expérience avec les atomes froids, malgré des conditions initiales identiques, **les points d'impact des atomes sont différents les uns des autres.**
- la mécanique quantique abandonne **la notion de trajectoire.**

Postulat : la mécanique quantique postule que l'on peut décrire l'état d'une particule à l'aide d'une fonction appelée **fonction d'onde ou amplitude de probabilité** qui est définie telle que

$$dP = |\psi(M,t)|^2 d\tau$$

est la probabilité d'être dans un volume $d\tau$ autour de M .

1.b. Densité de probabilité

Première approche :

- Si l'on considère un dé à 6 faces, alors la probabilité d'obtenir 2 est $1/6$.
- Si l'on considère maintenant un "dé magique" pouvant prendre toutes les valeurs réelles entre 0 et 6, alors la probabilité d'obtenir exactement 2 est **nulle** (il y a une infinité de valeurs possibles).

Pour ce type de "dé", on utilise une fonction appelée **densité de probabilité** qui est telle que $f(x)dx$ est la probabilité d'obtenir **un résultat entre x et $x + dx$** .

Par exemple, $\int_{-\infty}^y f(x)dx$ est la probabilité d'obtenir un résultat **inférieur à y** .

Remarques :

- La fonction d'onde est a priori à valeur complexe (dans \mathbb{C}).
- La fonction d'onde est régie par l'équation de Schrödinger. Cette équation est linéaire et permet, un peu comme le principe fondamental de la dynamique en mécanique classique, de prévoir l'évolution ultérieure.

Normalisation : la particule "doit être quelque part dans l'espace". En terme probabiliste cela se traduit par le fait que la somme de toutes les probabilités **est égale à un**.

$$\int_{\text{espace}} |\psi(M,t)|^2 d\tau = 1$$

1.c. Interprétation de l'expérience d'interférence d'atomes froids

De la même façon que pour les ondes, la fonction d'onde qui résulte du passage à travers les deux fentes correspond à la somme de ψ_1 , la fonction d'onde qui correspond au passage à travers la fente 1 et ψ_2 celle qui correspond à la 2^e fente.

Ainsi la fonction totale résultant du passage à travers les deux fentes est $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

On en déduit la densité de probabilité lorsque les deux fentes sont ouvertes :

$$|\psi(M,t)|^2 = \psi(M,t)\bar{\psi}(M,t) = (\psi_1 + \psi_2)(\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2) = \underbrace{|\psi_1|^2}_{\text{Fente 1 seule}} + \underbrace{|\psi_2|^2}_{\text{Fente 2 seule}} + \underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2 + \psi_2\bar{\psi}_1}_{\text{Interférences}}$$

- Dans un cas classique, sans interférence, le résultat avec deux fentes est simplement **la somme des résultats obtenus avec chacune des fentes séparément**.
- Dans un cas quantique, il y a en plus **un terme d'interférence comme pour les ondes**.
- Dans le cas des ondes, l'intensité lumineuse/sonore/... (Cf TP ondes sonores) était modulé à cause des interférences, dans le cas de corpuscules, c'est **la probabilité qu'un corpuscule passe à cet endroit qui est modulé**.

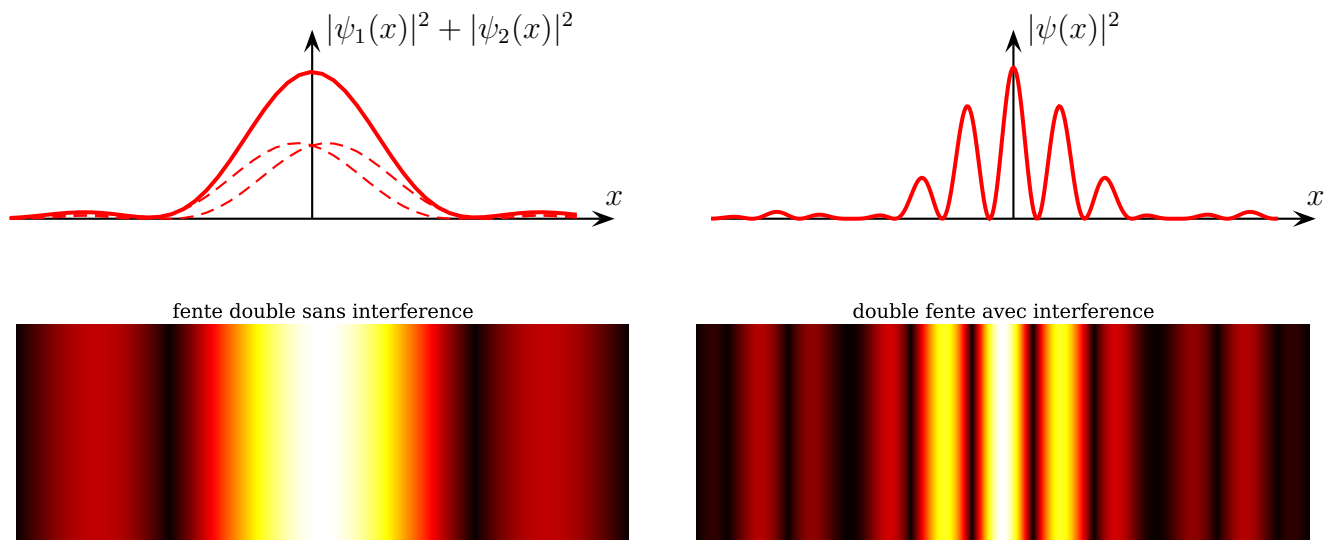


FIGURE 4 – Diffraction et interférences à travers une double fente.

Expérience : Diffraction et interférence par une bi-fente - Laser vert, fente, bi-fente et écran

2. Inégalité de Heisenberg spatiale

2.a. Idée

En mécanique quantique, il n'est pas possible de définir (et par conséquent de mesurer) de façon simultanée et avec une précision infinie l'impulsion et la position d'une particule.

2.b. Illustration expérimentale

Dispositif : on peut imaginer l'expérience suivante.

Afin de mesurer si une particule passe par une position x à Δx près, on place un écran percé en x par un trou de dimension Δx puis un second écran.

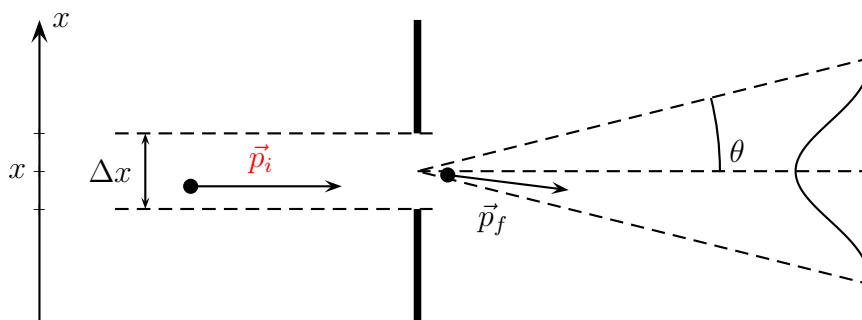


FIGURE 5 – Diffraction d'une particule à travers une fente, illustration de l'inégalité d'Heisenberg

Le résultat de la mesure s'interprète de la façon suivante :

- Si on observe un impact sur le 2^e écran, c'est que la particule **est passée par le trou**. Elle avait donc la position x à Δx près.
- Si on n'observe pas d'impact, alors que c'est la particule **n'a pas eu la position x à Δx près**.

Ainsi, si Δx tend vers zéro on détermine x avec une précision plus importante, voire infinie.

Résultat et interprétation (qualitatif) : en passant par le trou, la particule subit aussi un phénomène de diffraction. L'échelle angulaire typique de ce phénomène est

$$\sin \theta \sim \frac{\lambda}{\Delta x}$$

La projection p_x de la quantité de mouvement selon l'axe x , peut donc prendre des valeurs entre $-p \sin \theta$ et $+p \sin \theta$, elle est connue à Δp_x près.

L'ordre de grandeur de Δp_x est ainsi, en utilisant également la relation de de Broglie,

$$\begin{aligned} \Delta p_x &\sim p \sin \theta \sim p \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{\Delta x} \\ &\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p_x \sim h \end{aligned}$$

Ainsi, si Δx diminue Δp_x augmente et inversement, on ne peut pas connaître x et p_x avec une précision infinie et simultanément.

2.c. Résultat issu de la mécanique quantique

Le raisonnement précédent, en ordre de grandeur, n'a d'autre objectif que de se faire une idée de ce qu'implique l'inégalité de Heisenberg.

Les équations de la mécanique quantique permettent d'obtenir quantitativement le résultat suivant :

Inégalité spatiale d'Heisenberg : l'incertitude Δx sur la position d'une particule et celle sur son impulsion Δp_x vérifie **l'inégalité de Heisenberg :**

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

Remarques :

- Il s'agit de l'inégalité spatiale d'Heisenberg et il en existe une temporelle. On peut d'ailleurs la "deviner" en travaillant sur la dimension de \hbar (unité J.s)

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

- L'inégalité est bien entendu aussi valable dans les directions y et z .
- Cette inégalité interdit donc qu'une particule soit **parfaitement immobile à une position fixée**. En effet, si une particule est localisée à une position fixée exactement, alors $\Delta x = 0$ et si la particule est parfaitement immobile, alors $\Delta p_x = 0$.

Dans ce cas, l'inégalité d'Heisenberg ne serait plus vérifiée.

Une des conséquences est l'impossibilité d'atteindre le zéro absolu (0 Kelvin) pour lequel les particules seraient parfaitement immobiles ($\vec{p} = \vec{0}$ connu) aux nœuds d'un cristal (\vec{r} connu).

III Particules confinées

1. Cas général

Il est assez courant en physique que l'on considère des particules placées dans "un puits de potentiel".

Exemple : on peut par exemple considérer une bille piégée (confinée) dans un creux au fond duquel elle peut **osciller**.



FIGURE 6 – Exemple de particule confinée

L'énergie minimale du système correspond, en mécanique classique, à la bille **immobile au fond du puits**.

En mécanique quantique, comme la particule est confinée dans une certaine zone Δx , l'inégalité d'Heisenberg implique qu'elle ne peut rester immobile :

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$$

Si on considère que l'énergie de la particule est majoritairement cinétique, on a d'ailleurs, dans le plus bas niveau d'énergie (énergie minimale) :

$$E_{\min} = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{p_{\min}^2}{2m} \simeq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2}$$

On retiendra que plus le confinement de la particule est poussé, plus son énergie minimale sera **importante**.

2. Exemple de l'oscillateur harmonique quantique

2.a. Impossibilité du repos

Si l'on considère un oscillateur harmonique classique (force de rappel du type ressort), l'énergie minimale de cet oscillateur est atteinte lorsque son énergie potentielle et son énergie cinétique sont nulles.

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \Rightarrow l = l_0 \text{ et } v = 0$$

Dans ce cas, sa position et son impulsion sont exactement connues. D'un point de vue quantique, **cette situation est impossible** puisqu'elle ne vérifie pas l'inégalité de Heisenberg : la particule doit donc avoir une certaine vitesse (donc énergie cinétique) et une position qui peut fluctuer (donc une énergie potentielle).

2.b. Estimation de l'énergie minimale

En reprenant le modèle de l'oscillateur harmonique étudié dans le chapitre S_{01} , on considère une énergie potentielle du type

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \quad : \text{ particule dans un puits de potentiel parabolique}$$

avec ω_0 , **la pulsation propre** de l'oscillateur et x **l'élongation du ressort**.

- La masse oscille avec une amplitude x_0 , donc avec une vitesse d'amplitude $\omega_0 x_0$.
- La particule a donc une position définie à $\Delta x \sim x_0$ près et une impulsion définie à $\Delta p_0 = m\omega_0 x_0$ près.
- L'inégalité de Heisenberg impose $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ ce qui implique en ordre de grandeur :

$$x_0 m \omega_0 x_0 \gtrsim \hbar$$

- Donc l'énergie $E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$ vaut au minimum :

$$E_{\min} \sim \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

Remarques :

- E_{\min} est parfois nommée "énergie du point zéro", la valeur obtenue ici est cohérente avec des mesures expérimentales.
- Le raisonnement présenté est valable en ordre de grandeur. Il se trouve que le résultat exact à partir des équations de la mécanique quantique est **le même**.
- Ceci explique que même à température nulle (la température correspond à l'agitation des molécules), un solide **n'est pas parfaitement au repos**.
- On avait ici, $E_p = \frac{1}{2} k x^2$, on parle de puits de potentiel parabolique avec, par analogie avec la bille du 1., des oscillations au fond du puits.

3. Particule libre confinée 1D, puits rectangulaire infini

Pour simplifier l'étude, on peut envisager un puits de potentiel rectangulaire infini.

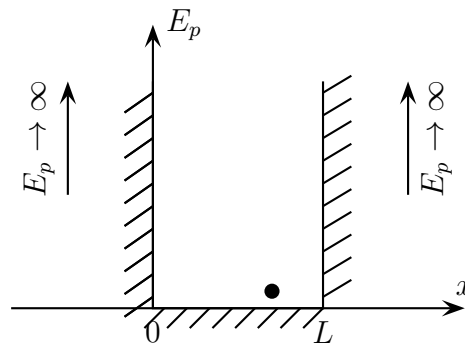


FIGURE 7 – Particule confinée dans un puits rectangulaire infini à 1D

On considère ici une particule confinée, c'est-à-dire que l'on maintient dans une certaine zone de l'espace (entre $x = 0$ et $x = L$ ici).

L'énergie potentielle est nulle pour $0 < x < L$ et tend vers l'infini ailleurs.

La probabilité de trouver la particule en dehors de cette zone est donc nulle :

$$x \notin [0, L] \Rightarrow |\psi(x, t)|^2 = 0 \Rightarrow \psi(x, t) = 0$$

On admet ici que ψ est une fonction continue ce qui implique :

$$\psi(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x = L, t) = 0$$

Ce type de situation est analogue à ce que l'on avait obtenu dans le cas d'ondes stationnaires pour une corde vibrante fixée aux deux bouts.

Pour la corde vibrante, on avait obtenu diverses solutions : les modes

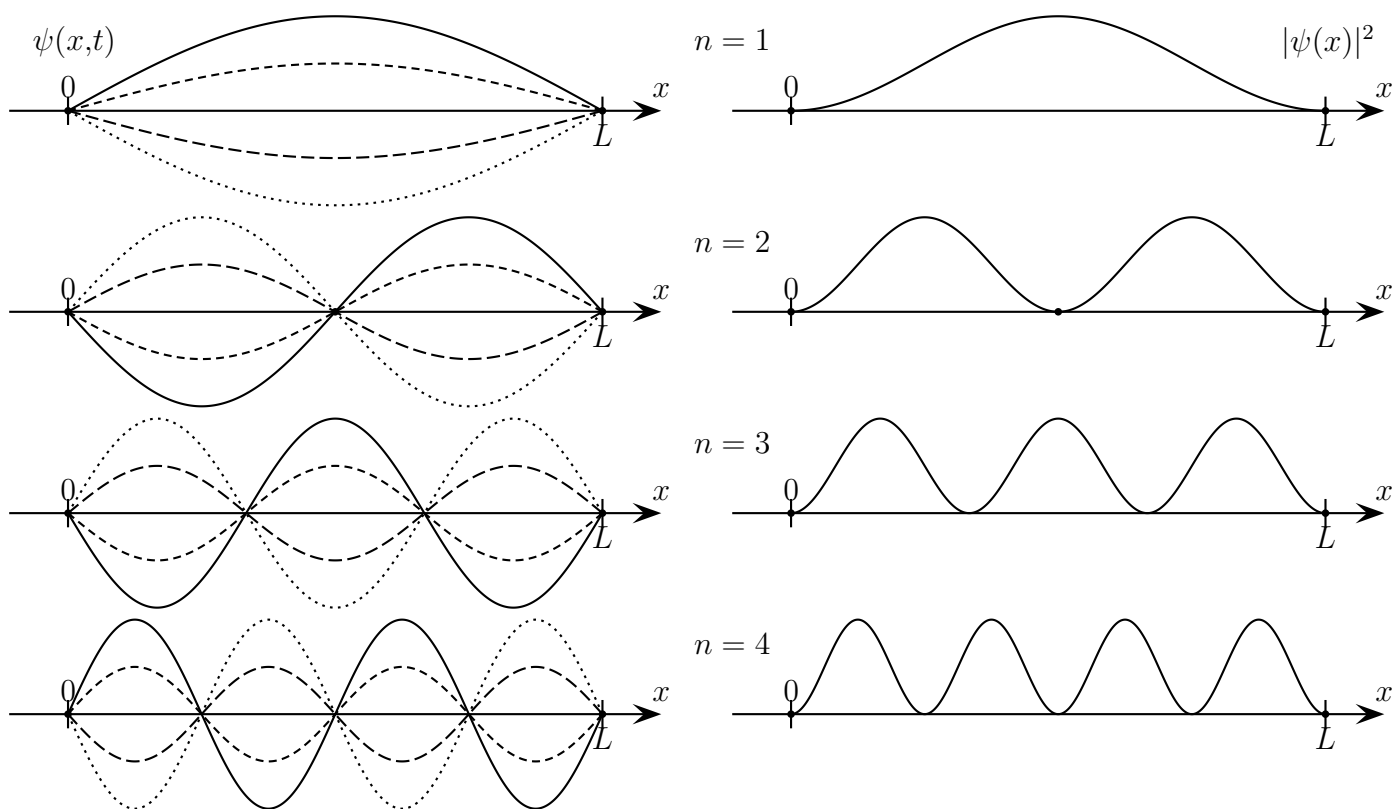


FIGURE 8 – Allure de $\psi(x,t)$ et densité de probabilité de présence $|\psi(x)|^2$.

Par analogie, on s'attend donc à une fonction d'onde de la forme

$$\psi(x,t) = f(x).g(t) \quad \text{comme une onde stationnaire}$$

et la longueur d'onde associée à la particule peut prendre les valeurs λ_n telles que

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L \quad \text{avec} \quad n > 0 \text{ entier d'où} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

D'après la relation de de Broglie, l'impulsion associée est $p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L}$.

L'énergie est donc

$$E_n = E_c + 0 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

L'énergie est donc **quantifiée** et l'écart entre les niveaux est de plus en plus grand : termes en n^2

Video : Quantification.mp4

La quantification est lié au fait que la particule est confinée : ce sont **les conditions aux limites** (annulation de ψ aux bords ici) qui ont induit la quantification.

Conclusion : on retiendra que la quantification des niveaux d'énergies et le confinement sont donc intimement liés.

Simulation : Etats-lies

Remarque : cela apparait en particulier pour **un électron qui est contraint de rester à proximité d'un noyau.**

Exercices et problèmes (CPGE et agrégation interne)

1. Exercices d'application

Exercice 1 : Modèle quantique d'une particule libre

On considère une particule quantique libre.

1. Rappeler l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour cette particule libre.
2. On admet que pour un état stationnaire, la fonction d'onde associée à la particule s'écrit $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$. Montrer que :
 - (a) la densité de probabilité d'un état stationnaire est indépendante du temps.
 - (b) l'équation vérifiée par la partie spatiale $\varphi(x)$ de la fonction d'onde de cette particule libre est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x)$$

3. En déduire l'expression de la fonction d'onde de la particule libre. Interpréter les solutions obtenues.
4. Montrer que la relation de dispersion associée à cette onde de matière s'écrit $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$. L'onde de matière est-elle dispersive ?

Exercice 2 : Analogie entre le puits infini et la corde de Melde

On souhaite étudier l'analogie entre les fonctions d'onde stationnaires d'une particule confinée dans un puits de potentiel infini, dans la cadre de la mécanique quantique, et les ondes stationnaires de la corde de Melde.

1. Puits de potentiel infini :

Une particule de masse m se déplace sur l'axe Ox dans un potentiel $V(x)$ tel que :

$$V(x) = 0 \text{ pour } -a < x < +a \text{ avec } a > 0$$

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ pour } x < -a \text{ et } x > +a \text{ avec } a > 0$$

- (a) On note $\varphi(x)$ une fonction d'onde stationnaire de la particule et E son énergie associée. On pose $\omega = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. À quelle équation obéit la fonction d'onde ?
- (b) Pour quelles raisons la seule solution possible est-elle $\varphi(x) = 0$, pour les domaines $x < -a$ et $x > a$? Quelle est la probabilité de trouver la particule hors du puits ?
- (c) À partir de la recherche des solutions de l'équation différentielle, déterminer les valeurs des niveaux d'énergie E dans le domaine $-a < x < +a$ et les fonctions d'onde associées sans oublier qu'il y a des solutions paires et impaires. Commenter et comparer à la situation classique d'une particule dans une cuvette de potentiel.

2. Analogie avec la corde de Melde :

On fait l'analogie avec une corde de Melde, de longueur $2a$, pincée aux deux extrémités ($x = 0$ et $x = 2a$), caractérisée par une vitesse v de l'onde mécanique de déformation.

- (a) Quelle est la forme de la fonction d'onde associée à la déformation de la corde ? Quelle quantification introduit-on ? Quelle est la différence fondamentale entre les deux situations ?
- (b) Quand on étudie la propagation dans la corde, on met en évidence deux paramètres physiques qui peuvent intervenir dans l'expression de la vitesse : sa masse linéique μ et sa tension F supposée uniforme (la norme de la force exercée sur un morceau de corde par le reste de corde à droite ou à gauche). Indiquer par analyse dimensionnelle comment la vitesse v en dépend à une constante multiplicative près.
- (c) On peut établir que la constante multiplicative vaut 1. Comment s'écrira l'équation de D'Alembert pour la corde ?
- (d) On voudrait voir 6 fuseaux sur la corde de masse linéique $\mu = 20,0 \text{ g.m}^{-1}$, tendue sur une longueur $2a = 1,00 \text{ m}$ et excitée par un vibreur de fréquence $f = 30 \text{ Hz}$. Quelle tension T doit-on imposer à la corde ? Comment faire ?
Comment traduire en termes d'onde progressive la solution stationnaire obtenue ?

Exercice 3 : Étude de l'atome d'hydrogène

1. Établir l'expression des niveaux d'énergie \mathcal{E}_n d'une particule quantique de masse m dans un puits de potentiel infini de largeur a .
2. On assimile l'atome d'hydrogène à une sphère de rayon r , r désignant la distance la plus probable de l'électron au centre du noyau, et on admet que l'électron se trouve dans un puits de potentiel infini de largeur égale à la demi-circonférence de l'atome.
 - (a) Exprimer les niveaux d'énergie \mathcal{E}_n de l'atome d'hydrogène.
 - (b) On obtient l'énergie E_n de l'électron lié au noyau en ajoutant à \mathcal{E}_n l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre ces deux charges. Exprimer E_n .
 - (c) Pour quelles valeurs de r l'atome est-il stable ? Calculer numériquement les trois premières valeurs de r .
3. Montrer que l'énergie de l'électron se met sous la forme $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$. Exprimer et calculer E_0 .
4. Quelle est la couleur de la radiation émise lorsque l'électron passe du niveau $n = 3$ au niveau $n = 2$?

Données :

masse de l'électron : $m = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$; charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$;
 constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34} \text{ J.s}$; permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,8.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$;
 célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

2. Extrait du sujet de physique - agrégation interne - 2015

L'eau sous tension

Troisième partie - L'eau métastable

3.1 Dualité onde-corpuscule en classe de terminale S

Le programme de terminale S demande aux élèves de maîtriser des connaissances sur les propriétés des ondes et la dualité onde-corpuscule (voir annexe D).

35. Placer sur une frise chronologique le nom d'au moins trois physiciens dont les travaux ont eu une importance cruciale pour édifier le concept de "dualité onde-corpuscule". Expliquer en quelques mots leur contribution et préciser la décennie de la publication de leurs travaux.
36. Juste après que l'enseignement de cette partie du programme a été mis en œuvre avec l'exemple du photon, un professeur souhaite bâtir une activité d'une heure environ, en s'appuyant sur les connaissances toutes récentes de ses élèves de terminale S et sur des documents numérotés donnés en annexe C. L'objectif visé, en faisant travailler les élèves en autonomie, serait de les amener à extraire des données et les exploiter, tout en les articulant pour rédiger une réponse à une question ouverte.

Imaginer ce questionnement qui peut être proposé aux élèves en précisant quels documents seront utilisés et quelles données éventuelles pourraient être rajoutées.

Les consignes données aux élèves doivent être précises et le corrigé des réponses attendues doit être fourni.

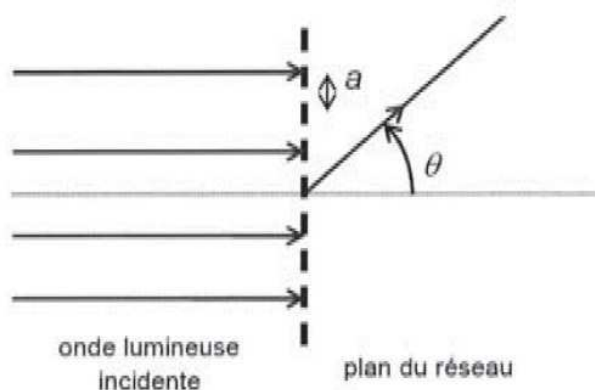
ANNEXE C : documents pour une séance de travail sur la dualité onde-corpuscule (terminale S)

Document 1 : les réseaux plans

Un réseau plan par transmission est constitué d'un grand nombre de fentes parallèles entre elles et équidistantes. La distance entre deux fentes consécutives (pas du réseau) est notée a .

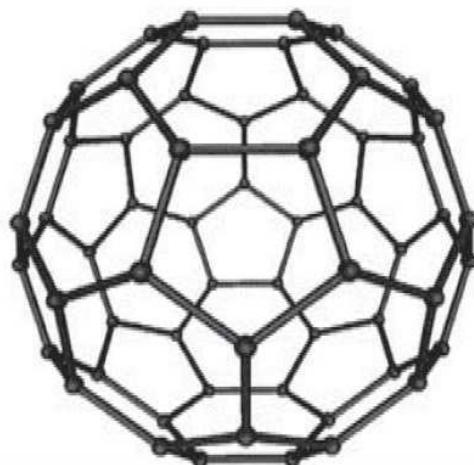
Pour une onde lumineuse monochromatique incidente arrivant perpendiculairement au plan du réseau, on observe un pic d'intensité dans la direction θ chaque fois que celui-ci vérifie la relation : $\sin \theta = p \frac{\lambda}{a}$, avec p un entier (l'ordre d'interférence du pic de lumière observé) et λ la longueur d'onde de l'onde lumineuse.

Cette relation est la traduction d'une condition d'interférence constructive en un point situé à grande distance du réseau.

**Document 2 : Molécule de fullerène C60**

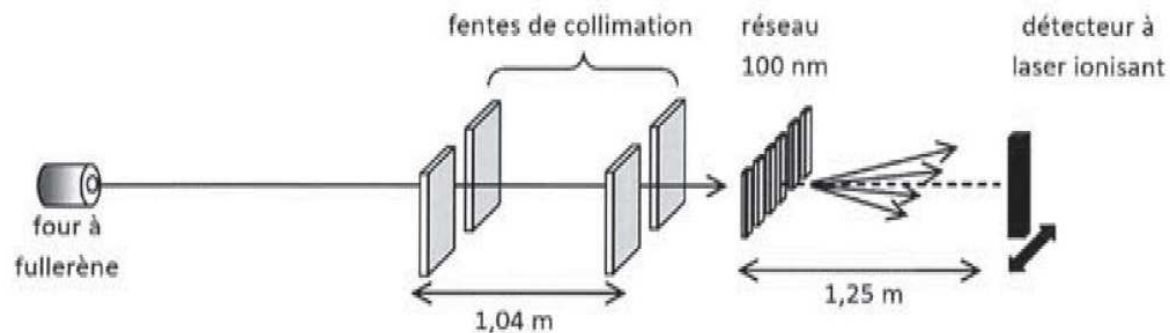
Masse $m = 1,2 \cdot 10^{-24}$ kg

Diamètre moyen de la molécule : 1000 pm.



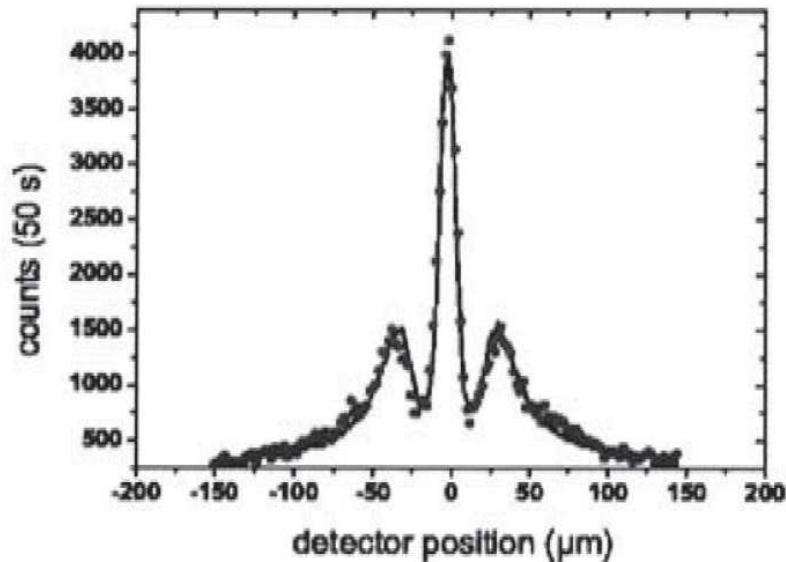
Document 3 : Expérience d'interférences avec des molécules de fullerène C₆₀ (d'après O. Nairz *et al*, Am. J. Phys.71, p. 319, 2003)

Dispositif expérimental. Il est constitué d'une source qui contient un gaz constitué de molécules de fullerène C₆₀ à une température de l'ordre de 900 K, ce qui correspond à une vitesse moyenne v_m de 200 m/s avec une largeur relative de $\Delta v/v_m = 60\%$.



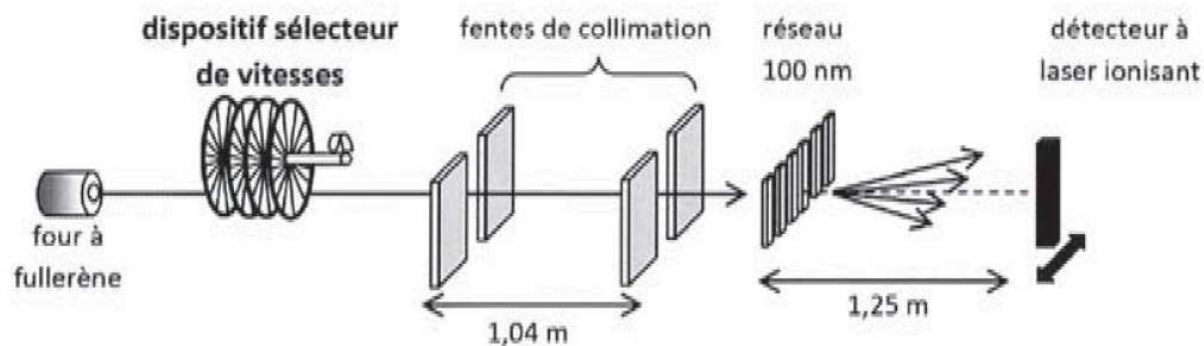
Après collimation, le jet est diffracté par un réseau de pas égal à 100 nm, la largeur d'une fente est de l'ordre de 55 nm. L'observation est réalisée dans un plan situé à une distance $L = 1,25$ m, le détecteur utilise un laser à argon qui ionise les molécules. La résolution spatiale du détecteur est de l'ordre de $8\ \mu\text{m}$ ce qui est suffisant pour observer la figure d'interférence.

Résultats. La figure ci-dessous montre la figure d'interférence observée. Elle fixe également les échelles de distances. Les molécules sont identifiées par des impacts individuels et la figure d'interférence se construit, pas à pas, au fur et à mesure de l'accumulation des données.

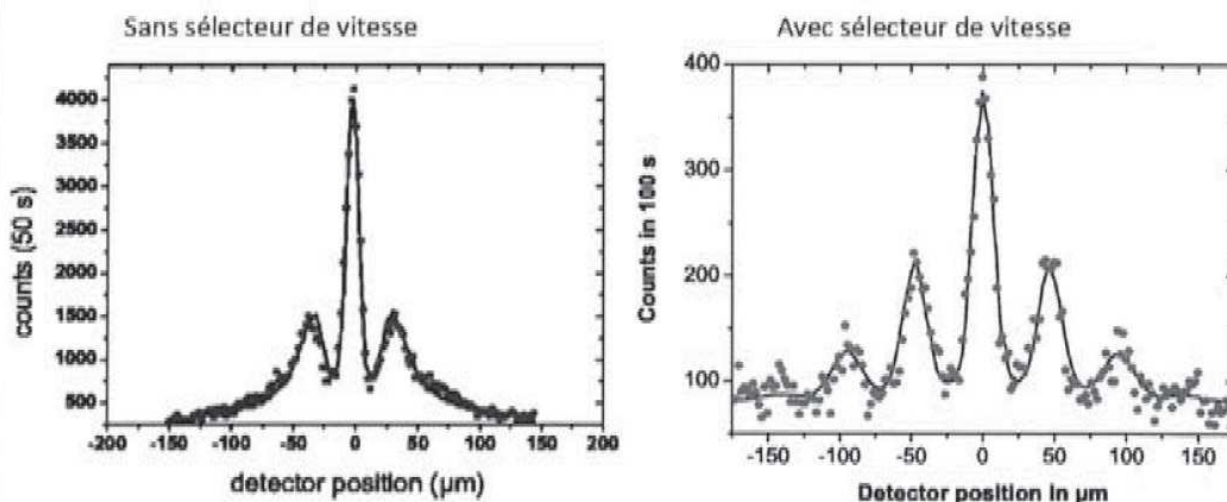


Document 4 : Expérience d'interférences avec des molécules de fullerène C₆₀ – sélection des vitesses (d'après O. Nairz *et al*, Am. J. Phys.71, p. 319, 2003)

Dispositif expérimental. Il est identique à celui décrit dans le document 3, à ceci près qu'un sélecteur de vitesse a été interposé à la sortie du four. La vitesse moyenne est alors égale à $v_m = 117$ m/s avec une largeur relative $\Delta v/v_m = 17\%$.



Résultats. Les figures ci-dessous montrent l'allure des figures d'interférence observées.



Annexe D : extraits des programmes

Classes de cinquième (Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008)

Connaissances	Capacités
LES CHANGEMENTS D'ÉTAT DE L'EAU : que se passe-t-il quand on chauffe ou refroidit de l'eau (sous pression normale) ?	
Les trois états physiques de l'eau	
Propriétés spécifiques de chaque état physique de l'eau : - forme propre de l'eau solide (glace) ; - absence de forme propre de l'eau liquide ; - horizontalité de la surface libre de l'eau liquide ; - compressibilité et expansibilité de la vapeur d'eau qui occupe tout le volume offert.	Observer et recenser des informations relatives à la météorologie et à la climatologie. Identifier et décrire un état physique à partir de ses propriétés. Respecter sur un schéma les propriétés liées aux états de la matière.
Les changements d'état	
Cycle de l'eau.	
Solidification, fusion, liquéfaction, vaporisation.	Réaliser, observer, schématiser des expériences de changements d'état.
Lors des changements d'état, la masse se conserve et le volume varie.	Pratiquer une démarche expérimentale pour mettre en évidence ces phénomènes.
<i>Un palier de température apparaît lors du changement d'état d'un corps pur.</i>	Construire le graphique correspondant en appliquant des consignes. Contrôler, exploiter les résultats.
L'augmentation de la température d'un corps pur nécessite un apport d'énergie. Les changements d'état d'un corps pur mettent en jeu des transferts d'énergie. Températures de changements d'état de l'eau sous pression normale.	

Classes de seconde générale (Bulletin officiel spécial n° 4 du 29 avril 2010)

NOTIONS ET CONTENUS	COMPÉTENCES ATTENDUES
L'étude du mouvement : l'observation, l'analyse de mouvements et le chronométrage constituent une aide à l'activité sportive. Des lois de la physique permettent d'appréhender la nature des mouvements effectués dans ce cadre.	
Actions mécaniques, modélisation par une force. Effets d'une force sur le mouvement d'un corps : modification de la vitesse, modification de la trajectoire. Rôle de la masse du corps. Principe d'inertie.	Savoir qu'une force s'exerçant sur un corps modifie la valeur de sa vitesse et/ou la direction de son mouvement et que cette modification dépend de la masse du corps. Utiliser le principe d'inertie pour interpréter des mouvements simples en termes de forces. <i>Réaliser et exploiter des enregistrements vidéo pour analyser des mouvements.</i>

Classes de Première S (Bulletin officiel spécial n° 4 du 30 novembre 2010)

NOTIONS ET CONTENUS	COMPÉTENCES ATTENDUES
Formes et principe de conservation de l'énergie	
<p>Energie d'un point matériel en mouvement dans le champ de pesanteur uniforme : énergie cinétique, énergie potentielle de pesanteur, conservation ou non conservation de l'énergie mécanique. Frottements ; transferts thermiques ; dissipation d'énergie.</p> <p>Formes d'énergie.</p> <p>Principe de la conservation d'énergie. Application à la découverte du neutrino dans la désintégration β.</p>	<p>Connaître et utiliser l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en translation et de l'énergie potentielle de pesanteur d'un solide au voisinage de la Terre</p> <p><i>Réaliser et exploiter un enregistrement pour étudier l'évolution de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique d'un système au cours du mouvement.</i></p> <p>Connaître diverses formes d'énergie.</p> <p>Exploiter le principe de conservation de l'énergie dans des situations mettant en jeu différentes formes d'énergie.</p>

Physique-chimie en terminale STI2D-STL (Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011)

NOTIONS ET CONTENUS	CAPACITES EXIGIBLES
Les fluides dans l'habitat	
<p>Pression dans un fluide parfait et incompressible en équilibre : pressions absolue, relative et différentielle.</p> <p>Equilibre d'un fluide soumis à la pesanteur.</p> <p>Ecoulement stationnaire.</p> <p>Débit volumique et massique</p>	<p>Mesurer des pressions (absolue et relative).</p> <p>Citer et exploiter la principe fondamentale de l'hydrostatique.</p> <p>Expliciter la notion de vitesse moyenne d'écoulement dans une canalisation.</p> <p>Mesurer un débit.</p> <p>Citer et expliquer la loi de conservation de la masse</p>

Physique-chimie en enseignement spécifique de TS (Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011)

NOTIONS ET CONTENUS	Compétences exigibles
<p>Propriétés des ondes Diffraction. Influence relative de la taille de l'ouverture ou de l'obstacle et de la longueur d'onde sur le phénomène de diffraction.</p> <p>Cas des ondes lumineuses monochromatiques, cas de la lumière blanche.</p> <p>Interférences.</p> <p>Cas des ondes lumineuses monochromatiques, cas de la lumière blanche. Couleurs interférentielles.</p> <p>Effet Doppler.</p>	<p>Savoir que l'importance du phénomène de diffraction est liée au rapport de la longueur d'onde aux dimensions de l'ouverture ou de l'obstacle. Connaître et exploiter la relation $\theta = \lambda/a$. Identifier les situations physiques où il est pertinent de prendre en compte le phénomène de diffraction. <i>Pratiquer une démarche expérimentale visant à étudier ou utiliser le phénomène de diffraction dans le cas des ondes lumineuses.</i></p> <p>Connaître et exploiter les conditions d'interférences constructives et destructives pour des ondes monochromatiques.</p> <p><i>Pratiquer une démarche expérimentale visant à étudier quantitativement le phénomène d'interférence dans le cas des ondes lumineuses.</i></p> <p><i>Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour mesurer une vitesse en utilisant l'effet Doppler.</i> Exploiter l'expression du décalage Doppler de la fréquence dans le cas des faibles vitesses. Utiliser des données spectrales et un logiciel de traitement d'images pour illustrer l'utilisation de l'effet Doppler comme moyen d'investigation en astrophysique.</p>
<p>Dualité onde-particule Photon et onde lumineuse.</p> <p>Particule matérielle et onde de matière ; relation de de Broglie.</p> <p>Interférences photon par photon, particule de matière par particule de matière.</p>	<p><i>Savoir que la lumière présente des aspects ondulatoire et particulaire.</i></p> <p><i>Extraire et exploiter des informations sur les ondes de matière et sur la dualité onde-particule.</i> Connaître et utiliser la relation $p = h/\lambda$. Identifier des situations physiques où le caractère ondulatoire de la matière est significatif.</p> <p><i>Extraire et exploiter des informations sur les phénomènes quantiques pour mettre en évidence leur aspect probabiliste.</i></p>

Proposition de corrigé

Partie C - l'eau metastable

3.1 dualité onde-corpuscule en calsse de terminale S

35. Au cours des 18^{ème} et 19^{ème} siècles s'est imposé le caractère ondulatoire de la lumière et les équations de Maxwell semblent mettre un point final au débat. Il subsiste pourtant "deux petits nuages dans le ciel de la physique théorique" (l'expression est de William Thomson alias lord Kelvin). L'un d'entre eux est le rayonnement du corps noir. Son étude amènera Max Planck à formuler en 1900 l'hypothèse que les échanges d'énergie entre le rayonnement électromagnétique et le matériau émetteur sont quantifiés. Cette hypothèse est reprise par Einstein en 1905 pour expliquer l'effet photoélectrique. En 1927, à la suite des travaux de Bohr, De Broglie généralise la dualité onde-corpuscule aux particules matérielles.

36. – *Exemple de réponse sous la forme d'une question ouverte :*

On peut donner les trois premiers documents et prévoir un document supplémentaire rappelant la relation de de Broglie. Les élèves sont soumis à une seule question ouverte telle que celle-ci : "Exploiter quantitativement ces documents pour montrer que le modèle ondulatoire fournit une interprétation des résultats de cette expérience d'interférences, réalisée avec des molécules de fullerène C60." Des aides seront données aux élèves pour les guider dans leurs calculs et leur suggérer de pratiquer certaines analogies.

– *Autre exemple :*

On peut procéder différemment en fournissant uniquement le document 2 et 3 et en donnant le temps de réflexion suffisant aux élèves avec toutes les notes de cours (qui n'évoquent pas le fullerène) pour formuler une question que leur suggèrent ces documents. Par exemple : "Comment se comportent les molécules de fullerène dans cette expérience ?" Ensuite une étude quantitative guidée peut être menée, une fois bien identifiée la nature du comportement de ces molécules. Le document 1 et la relation de de Broglie sont ajoutés aux données.

Dans les deux cas, il est préférable de donner le document 4 dans un second temps. Son analyse permet de conforter les résultats obtenus avec un jet thermique et de pousser l'analogie avec la diffraction d'un faisceau lumineux.

Enfin, il est instructif de demander ce qui se passe avec un vrai ballon de football !

– *Exemple de consignes*

- Calculer la longueur d'onde associée aux molécules de fullerenes dans l'expérience

La longueur d'onde de de Broglie associée est donnée par la relation $\lambda = \frac{h}{m v_m}$. Avec

une masse $m = 1,2 \cdot 10^{-24}$ kg on trouve $\lambda = 2,8$ pm. Nous pouvons souligner qu'elle est très petite à l'échelle de la taille de la molécule qui est de l'ordre de 1000 pm.

- Pour l'onde associée aux fullerenes, à quoi correspond un "maximum d'intensité", terme utilisé pour les ondes lumineuses ? Pour quels angles observe-t-on un "maximum d'intensité" ?

On détecte des impacts : un maximum d'intensité correspond à un maximum de particules détectées. Ce maximum est décalé de $35 \mu\text{m}$ par rapport à la direction du faisceau incident, soit un angle $\frac{35 \cdot 10^{-6}}{1,25} = 28 \cdot 10^{-6}$ rad. Cet angle est *très petit* ! Cela impose que la dimension transverse du détecteur soit elle aussi très petite pour résoudre les maxima.

- Si l'onde associée aux fullerenes, se comporte comme une onde lumineuse, dans quelles directions doit-on observer un maximum d'intensité ?

Pour $p = 1$, en utilisant la relation du doc. 1, on trouve que l'angle de diffraction vaut $\theta = \lambda/d = 28 \mu\text{rad}$, ce qui est parfaitement cohérent avec la description ondulatoire du faisceau de molécules.

– *Pour aller plus loin : utilisation du document 4*

- L'angle correspondant aux "maxima d'intensité" change-t-il quand on interpose un sélecteur de vitesse ? Proposer une explication.

- Quel serait l'analogue optique d'un sélecteur de vitesse ?

3. Extrait du sujet de physique II - filière PC - Concours Mines Ponts 2018

Dualité onde-corpuscule

III. — Expérience de FAGET et FERT

L'expérience réalisée à TOULOUSE en 1956 par Jean FAGET et Charles FERT consiste à interposer un fil d'araignée métallisé F (de rayon $r_0 \simeq 1 \mu\text{m}$) chargé positivement sur le trajet d'un faisceau d'électrons issus du même point S , sortie d'un canon à électrons. Un électron est reçu en un point M de l'écran.

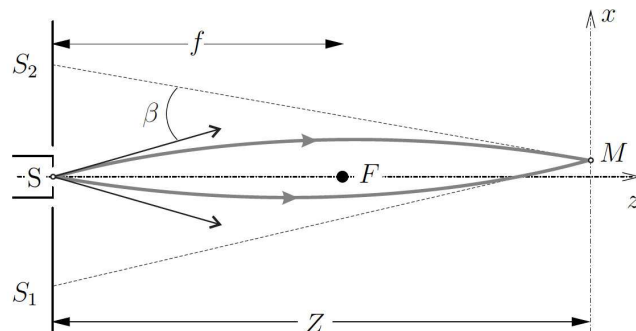


FIGURE 1 – Expérience de FAGET et FERT

Lors de sa traversée de la cavité, attiré par le fil, l'électron a pu passer soit à droite, soit à gauche de ce dernier (voir figure 1). Si les électrons passent à une faible distance du fil, on montre que l'angle β de déviation des électrons est faible et pratiquement le même pour tous.

Dans ces conditions, tout se passe comme si les électrons, collectés sur l'écran après déviation, étaient émis suivant des trajectoires rectilignes en provenance des sources fictives S_1 et S_2 , telles que $S_1 S_2 = s = 2 f \beta$, avec $f = 1 \text{ cm}$ et

$$\beta = \frac{\pi e E_0 r_0}{m v^2}$$

Dans cette relation E_0 représente l'intensité du champ électrique à la surface du fil, v la vitesse d'un électron et e la charge élémentaire.

□ 10 — Décrire qualitativement ce qu'on observe sur l'écran.

□ 11 — Exprimer, en fonction de E_0 , r_0 et de la distance r au fil, le champ électrique \vec{E} créé par le fil chargé. En déduire le potentiel $V(r)$ duquel dérive \vec{E} .

□ 12 — Sachant que l'on a $m v^2 \simeq 10^5 \text{ eV}$ et $E_0 \simeq 10^6 \text{ V.m}^{-1}$, calculer la différence de potentiel $U = V(r_0) - V(f)$ à imposer entre la sortie du canon et le fil pour avoir $\beta \sim 10^{-4}$ radian.

□ 13 — Dans les expériences d'optique électronique les électrons arrivent un par un ; décrire comment se forme la figure sur l'écran.

□ 14 — Comment interpréter l'onde associée aux électrons ? Calculer l'interfrange δx de l'expérience dans le cas où $Z = 10 f$. Comment varie-t-elle quand on augmente U ?

□ 15 — Que peut-on dire de la zone occupée par les franges (champ d'interférences) lorsqu'on augmente le potentiel U .

□ 16 — Que pensez-vous de l'approche classique, au sens non-relativiste, effectuée ici ?

4. Extrait du sujet de physique - filière MP - Concours Communs Polytechniques 2018

Atome d'hydrogène et quantification

Voir document en annexe.