Relativité restreinte : CQFS.

Def : Référentiel d'inertie = • espace homogène et isotrope + temps uniforme.
• Libre mouvement (càd ∅ forces) à vitesse constante

Principe de Galilée : Les lois de la méca sont identiques dans les référentiels d'inertie
⟹ invariance des =° du mouvt par rapport aux transforma° des coordonnées et du temps.

⚠ Les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par la transforma° de Galilée !

Équations de Maxwell dans le vide : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$.

$\nabla \vec{E} = 0$ (Gauss) $\qquad \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (Faraday).

$\nabla \vec{B} = 0$ (∅ charges magn.) $\qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (Maxwell-Ampère)

Équation d'onde : $\nabla^2 f = \dfrac{1}{v^2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ $\qquad c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \ m.s^{-1}$

Postulats de la mécanique relativiste :

- Tous les systèmes galiléens sont équivalents
- La vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de la source ⟹ la notion de temps est relative

Transformation de Lorentz : – linéaire
– vérifie le principe de Galilée
– vérifie la transformation de Galilée quand $v \to 0$.

On a S' le référentiel lié à l'événement et S le référentiel inertiel du laboratoire.
Dans S' un événement se passe à t' et à x', à t et à x dans S.

Cas particulier : $x' = 0$ et $x = vt$. L'invariance de l'intervalle espace-temps donne une relation entre t et t'.

$$(ct)^2 - x^2 = (ct)^2 - (vt)^2 = (ct')^2 - (x')^2 \implies t = \frac{t'}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma t'$$

γ : facteur de dilata° du temps.

De manière générale : $\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(-\frac{vx}{c^2} + t\right) \end{cases}$ Propriétés : – linéaire – homogène } dans l'espace temps en lui-même

Propriété : Le produit de 2 transformations de Lorentz est une transformation de Lorentz

Vitesse de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction n : $u' = \frac{c}{n}$.

Convention de sommation d'Einstein : $A^i = \sum_j g^{ij} A_j \equiv g^{ij} A_j$.

(on enlève la somme dès lors qu'un indice se retrouve à la fois en contra et en covariant)

$A^i \to$ contravariant $A_i \to$ covariant

g^{ij} est le tenseur métrique contravariant. Sa forme covariante existe et on a la rela°:

$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$ avec δ^i_j le delta de Kronecker.

N.B : en relativité, le tenseur métrique est notée η.

Tenseurs contra et covariants :

$F = (F^1, F^2, \ldots, F^N) = (F^i)$ défini dans E de $\mathbb{R}^N$ => champ de vecteurs

↳ $F^i(x)$ avec $x = (x^1, x^2, \ldots, x^N) = (x^i)$ => champ scalaire.

On considère les F^i comme des fonctions réelles.

F est un tenseur contravariant d'ordre 1 ssi les composantes F^i et F'^i relatives au système de coordonnées (x^i) et (x'^i) obéissent à la transformation suivante :

$$F'^i = \sum_{r=1}^{N} F^r \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} = F^r \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}$$

F est un tenseur covariant d'ordre 1 ssi les composantes F_i et F'_i relatives au système de coordonnées (x^i) et (x'^i) obéissent à la transformation suivante :

$$F'_i = \sum_{r=1}^{N} F_r \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} = F_r \frac{\partial x^r}{\partial x'^i}$$

Quadrivecteurs & Quadritenseurs

Quadrivecteur champ : $A'^{\mu}(x') = \ell^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x)$ → Contravariant

$B'_{\mu}(x') = B_{\nu}(x) (\ell^{-1})^{\nu}_{\mu}$ → Covariant

⇒ Invariance du produit scalaire $(B_{\mu}(x), A^{\mu}(x))$.

Produit tensoriel de 2 quadrivecteurs contravariants $A_1^{\mu}(x)$ et $A_2^{\mu}(x)$ se transforme selon la loi :

$$A_1'^{\mu}(x') A_2'^{\nu}(x') = \ell^{\mu}_{\alpha} \ell^{\nu}_{\beta} A_1^{\alpha}(x) A_2^{\beta}(x)$$

Tenseur de Levi-Civita → antisymétrique et invariant par rapport au groupe propre de Lorentz.

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices égaux} \\ 1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\mu \text{ est une permuta° paire de } 0123 \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\mu \text{ est une permuta° impaire de } 0123. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{\beta} u_{\gamma} \hat{e}_{\alpha}$$

Temps propre $d\tau$ (mesuré avec une seule horloge) : $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$.

Vitesse propre : $\frac{dl}{d\tau}$ → distance impropre
→ temps propre.

Avantage : transforma° facile avec la transformation de Lorentz.

⇒ χ est la partie espace d'un quadrivecteur : $\chi^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$. et $\chi^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c\,dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

χ est appelée quadrivitesse et on a :

$$\chi'^{\mu} = \ell^{\mu}_{\nu} \chi^{\nu}$$

⇒ La transformation des vitesses propres est plus simple : $\begin{cases} \chi'^0 = \gamma(\chi^0 - \beta\chi^1) \\ \chi'^1 = \gamma(\chi^1 - \beta\chi^0) \\ \chi'^2 = \chi^2 \\ \chi'^3 = \chi^3 \end{cases}$

Transformation de Lorentz en notation tensorielle.

$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow$ Quadrivecteur contravariant x^μ (représente un point de l'espace-temps décrit par un événement au temps t en (x^1, x^2, x^3))

On définit la matrice l suivante :

$$l^\mu_\nu = \begin{pmatrix} l^0_0 & l^0_1 & l^0_2 & l^0_3 \\ l^1_0 & l^1_1 & l^1_2 & l^1_3 \\ l^2_0 & l^2_1 & l^2_2 & l^2_3 \\ l^3_0 & l^3_1 & l^3_2 & l^3_3 \end{pmatrix}$$

En vertu des propriétés de base de la transformation de Lorentz, on a par définition :

$$x'^\mu = l^\mu_\nu x^\nu$$

On utilise l^μ_ν pour passer d'un référentiel à un autre !

On pose $l^\mu_\nu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$

Sur Ox, la transformation de Lorentz s'écrit :
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta c t) \\ t' = \gamma\left(-\frac{\beta x}{c} + t\right) \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On a alors : $(l^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Produit scalaire de deux quadrivecteurs de l'espace-temps :

$(x, y) \equiv x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu$ avec $\eta_{\mu\nu}$ le tenseur métrique covariant : $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Quadrivecteur covariant : $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow \underbrace{x_0 = x^0 \text{ et } x_k = -x^k}$

On utilise η pour passer de covariant à contravariant

Transformation de Lorentz inverse :

$$x^\mu = h^\mu_\nu x'^\nu = h^\mu_\nu l^\nu_\alpha x^\alpha \qquad \text{avec } h^\mu_\nu l^\nu_\alpha = \delta^\mu_\alpha$$

$$h = (h^\mu_\nu) = ((l^{-1})^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conservation de l'impulsion : vérifiée si on prend χ à la place de la vitesse ordinaire u.

Masse d'une particule en mouvement : $\dfrac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = M$.

Rappel : En classique, l'impulsion est conservée s'il y a conservation de m.
En relativité, en gardant l'expression classique, on remplace m par M : $\vec{p} = M\vec{u}$.

Mc^2 = énergie totale de la particule $\quad$ mc^2 = énergie de la particule <u>au repos</u>

À retenir : $\dfrac{m_A}{\sqrt{1-\frac{u_A^2}{c^2}}} + \dfrac{m_B}{\sqrt{1-\frac{u_B^2}{c^2}}} = \dfrac{m_C}{\sqrt{1-\frac{u_C^2}{c^2}}} + \dfrac{m_D}{\sqrt{1-\frac{u_D^2}{c^2}}}$ $\Rightarrow$ Masse et énergie sont deux concepts équivalents

$E = mc\chi^0 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ $\qquad$ Impulsion : $p = \dfrac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

On définit p en notation tensorielle : $\begin{cases} p^\mu = m\chi^\mu & \text{avec } \mu = 1, 2 \text{ ou } 3. \\ p^0 = m\chi^0 = \dfrac{E}{c} & \text{avec } \mu = 0. \end{cases}$

On a alors $p'^\mu = l^\mu_\nu \, p^\nu \longrightarrow$ Quadrivecteur impulsion - énergie

Equation de Klein-Gordon : permet de retrouver l'invariant impulsion - énergie.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0.$$

Énergie d'une particule relativiste :

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl] \arrow[d, dash] \arrow[dr] & \\
E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \arrow[d] & p = \dfrac{uE}{c^2} \arrow[dr] & E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \arrow[d] \\
u \arrow[ur, dash] \arrow[r] & p = \dfrac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \arrow[r] & p
\end{tikzcd}$$

Dynamique relativiste :

- $1^{ère}$ loi de Newton = $1^{ère}$ loi de la relativité
- $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ valable si on prend l'impulsion relativiste $m\vec{\chi}$
- La $3^{ème}$ loi ne s'applique pas en général dans le cadre relativiste
  → ce qui est simultané dans un référentiel inertiel ne l'est pas dans un autre.

Loi de Biot et Savart : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} I \cdot \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^2}$