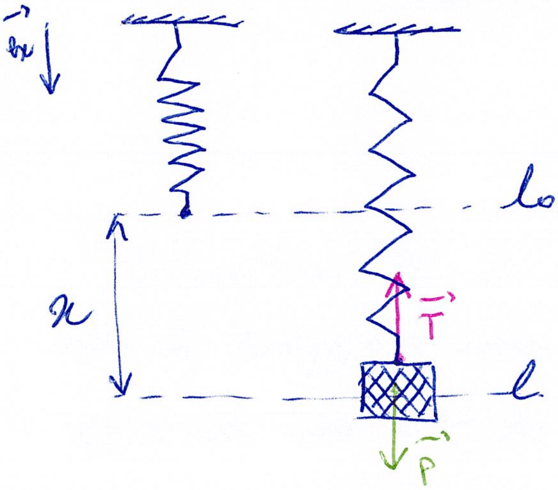
Mécanique système Masse - Ressort

I A l'équilibre statique



* Bilan des Forces :

$\vec{P} = mg\vec{e_x}$

$\vec{T} = -k(l-l_0)\vec{e_x}$

L'écart $\Delta l = l - l_0 = x$

d'où $\left| \begin{array}{l} l = l_0 + x \\ l_0 = l - x \end{array} \right.$

* Principe fondamental de la dynamique :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ | Le système est immobile. $\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

On projette sur l'axe vertical : $\vec{P} \Rightarrow mg$.

$\vec{T} \Rightarrow -k(l - l_0)$

$-k(l_0 + x - l_0)$

$-kx$

$mg - kx = 0$

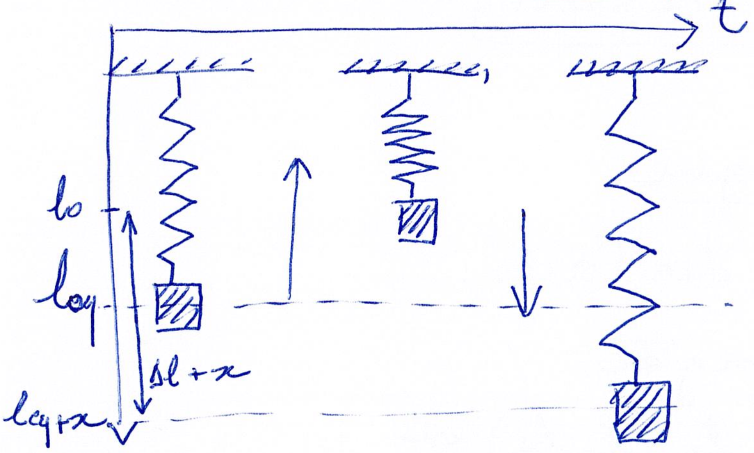
$$\boxed{mg = kx}$$

D'où on peut recalculer g ou k.

$g = \frac{kx}{m}$ $\boxed{k = \frac{mg}{x}}$ on retrouve la cste de raideur du ressort par exemple

$kg.s^{-2}$ ou $\frac{N}{m}$; $kg.$; $m.s^{-2}$; m

II Dynamique sans frottements :



On voit apparaître des oscillations si on sort la masse de sa position d'équilibre.

Dans quelle position est la masse à l'instant t ?
Soit $l > l_{eq}$ soit $l < l_{eq}$ donc par rapport à la position d'équilibre l_{eq} soit $x > 0$ ou $x < 0$

× Bilan des forces : $\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P}$, $\vec{T}$ mais variable dans le temps.

$P + T = m\ddot{x}$) 1D : $\vec{a} = \ddot{x}$

$mg + (-k(\Delta l + x)) = m\ddot{x}$

or $P = \boxed{mg = k\Delta l}$

$mg = k(l_{eq} - l_0)$ au repos.

On obtient alors l'expression : $\cancel{k\Delta l} - \cancel{k\Delta l} - kx$

$$\boxed{-kx = m\ddot{x}}$$ → Equation du 2nd ordre

$$m\ddot{x} + kx = 0$$ → Sans second membre

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$ Dans sa forme canonique $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\boxed{\ddot{x} + w_0^2 x = 0}$$

Equation de l'oscillateur harmonique.

méca ressort
2

Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0 \Rightarrow r^2 + w_0^2 = 0$$

On transforme l'équa diff en polynome caractéristique

$$r^2 = -w_0^2 \quad \text{avec } -w_0^2 = (iw_0)^2$$

$$r = \pm i w_0 \Rightarrow \text{solution de la forme } \left| \begin{array}{l} e^{rt} \\ e^{iwt}. \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = e^{iw_0 t} \\ x(t) = A\cos(w_0 t) + B\sin(w_0 t) \\ x(t) = X_0 \cos(w_0 t + \varphi) \end{array}}$$

expression de la coordonnée de la masse sous le ressort au cours du temps sous 3 formes équivalente.

Ici on retiendra que la solution du polynome $r^2 - w_0^2 = 0$ est $\boxed{e^{iw_0 t}}$

On voit dans la 3ième expression que c'est une fonction sinusoïdale :

X_0 = amplitude
w_0 = pulsation → fréquence
φ = phase.

Solution de l'oscillateur harmonique :

$$\boxed{x(t) = e^{iw_0 t} = X_0 \cos(w_0 t + \varphi)}$$

transmutation complexe.

III Dynamique avec frottements :

Supposons que l'on rajoute un frottement fluide (air / eau / ...) Une nouvelle force va apparaître elle sera proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$.

Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{T}, \vec{f}$

2ᵉ Loi de Newton : $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ | $\vec{a} = \ddot{x}$, $\vec{v} = \dot{x}$

$$mg + (-k(\Delta + x)) - \lambda \dot{x} = m\ddot{x}$$

de la même manière que sans frottements, $\boxed{-kx - \lambda \dot{x} = m\ddot{x}}$

Equation différentielle du second ordre.

$$\boxed{m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0}$$

Sans second membre.

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

- avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- avec $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$

$$Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \underbrace{\boxed{\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}}}_{\text{Terme d'amortissement.}} + \omega_0^2 x = 0}$$

La solution $x(t)$ est une combinaison linéaire $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$

Solution de l'équadiff : polynome caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

On transforme l'équadiff pour chercher Δ.
le discriminant.

meca amort 3

A noter qu'en elec et en meca on utilise pas la même expression :

$$\boxed{\ddot{x} + \boxed{\frac{\omega_0}{Q}}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad || \quad \boxed{\ddot{x} + \boxed{2\gamma}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

* Avec $\boxed{\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}}$ = taux d'amortissement. Plus γ est grand plus le système s'amortit vite. $\tau = 1/\gamma$

* Q mesure entre autre la selectivité de la bande passante en electicité : $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$ Q est sans dimensions.

Il faut en fonction du contexte privilegier une ou l'autre. Ici en meca $\rightarrow \gamma$.

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$ || $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$

$$= (2\gamma)^2 - 4 \times 1 \times \omega_0^2$$
$$= 4\gamma^2 - 4\omega_0^2$$
$$= 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

Critère sur Δ ? $\Delta > 0$ si : $\boxed{\gamma^2 > \omega_0^2}$ or $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$

$\Delta > 0$ si : $\frac{\omega_0^2}{4Q^2} > \omega_0^2 \Rightarrow \frac{1}{4Q^2} > 1 \Rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$

Si $\Delta > 0$ alors les solutions de l'equations diff. sont réelles : r_1 et r_2.

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\gamma + \sqrt{4(\gamma^2 - \omega_0^2)}}{2a} = \frac{-\cancel{2}\gamma + \cancel{2}\sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}}{\cancel{2}}$$

$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}$ forcement négative

Dans ce cas où $\gamma > \omega_0$ avec racine réelle la solution de l'équation différentielle est de la forme : $\boxed{x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}}$

Le régime | est apériodique
| revient lentement à sa position d'équilibre.

critère sur Δ ? Si $\gamma = \omega_0$ alors $\Delta = 0$

Il existe une unique solution. $r_c = -\gamma$ et donc $= -\omega_0$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{0}}{2} = -\gamma$$

Dans le cas où $\gamma = \omega_0$ avec racine unique la solution de l'équation est :

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}}$$

Le régime | est critique
| revient rapidement à la position d'équilibre

critère sur Δ ? Si $\gamma < \omega_0$ $\Delta < 0$

$\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$ Il existe alors 2 racines complexes.

$\hookrightarrow Q < \frac{1}{2}$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\gamma \pm i2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{\cancel{2}}$$

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

On appelle alors $\boxed{\gamma^2 - \omega_0^2}$ la pseudo pulsation.

$\downarrow$

$\omega_1 \rightarrow r_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_1}$

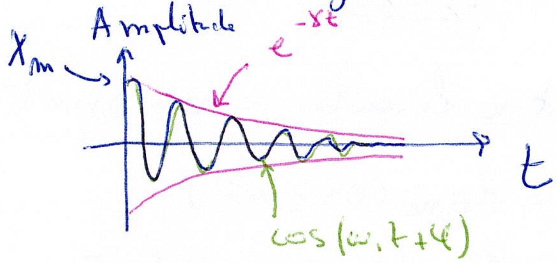
Dans ce cas la solution de l'équadiff sera de la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(C_1 e^{j\omega_1 t} + C_2 e^{-j\omega_1 t}\right) \\ \text{ou} \quad x(t) &= e^{-\gamma t}\left(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)\right) \\ \text{ou} \quad x(t) &= X_m \underbrace{e^{-\gamma t}} \underbrace{\cos(\omega_1 t + \varphi)} \end{aligned}}$$

Si on analyse cette expression : X_m = amplitude max.

$e^{-\gamma t}$ = décroissance expo

$\cos(\omega_1 t + \varphi)$ = oscillations.



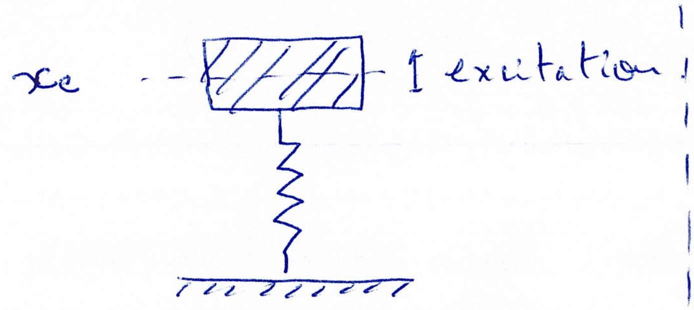
$$X_m = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

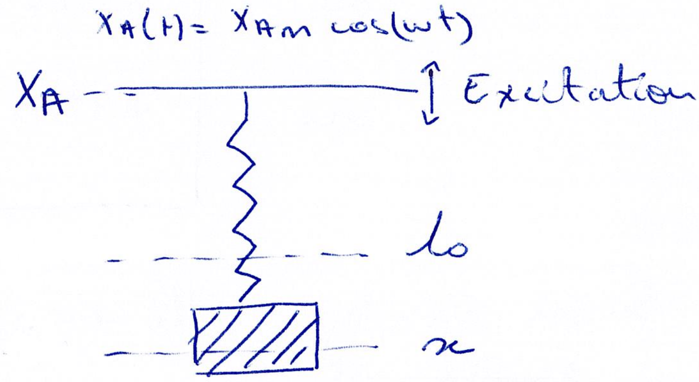
$$\tan\varphi = -\frac{C_2}{C_1}$$

Avec masse + ressort en oscillation libre on retrouve cette situation si on écarte la masse de sa position d'équilibre.

IV Régime sinusoïdale forcé :

On ajoute une force excitatrice au système. Cette force peut s'appliquer soit sur la masse soit sur le ressort :





La masse a un mouvement oscillant : Force = $F_0 \cos(\omega t)$

2ème Loi de Newton $\vec{P}, \vec{T}, \vec{f}, \vec{F}_{exc}$

$$m\ddot{x} = mg - k(x-l_0) - \lambda\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$$

A l'équilibre : $F_0 = 0$ $\quad x = x_e$ $\quad \ddot{x} = 0$

$$0 = mg - k(x_e - l_0)$$

Par différence :

$$m\ddot{x} - 0 = \cancel{mg} - \cancel{mg} - k(x-l_0) - \lambda\dot{x} + F_0\cos(\omega t) + k(x_e - l_0)$$

$$m\ddot{x} = -kx + \cancel{kl_0} + kx_e - \cancel{kl_0} - \lambda\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} = -k(\underbrace{x - x_e}_{X}) - \lambda\dot{x} + F_0\cos(\omega t)$$

$$m\ddot{X} = -kX - \lambda\dot{X} + F_0\cos(\omega t)$$

$$m\ddot{X} + \lambda\dot{X} + kX = F_0\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\lambda}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\lambda}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \overset{=\omega_0^2}{\frac{k}{m}} X_A(t)}$$

La partie haute a un mvt

$$X_A(t) = X_{Am}\cos(\omega t)$$

Quand la tension est à l'équilibre $T = -kx$

Mais ici X_A se déplace

$$T = -k(\underbrace{x - X_A}_{} - l_0)$$

longueur du ressort à un instant t

D'où :

① $m\ddot{x} = mg - k(x - X_A - l_0) - \lambda\dot{x}$

A l'équilibre on sait que :

② $0 = mg - k(x_{eq} - l_0)$

$\Rightarrow$ ① - ②

$$m\ddot{x} - 0 = \cancel{mg} - k(x - X_A - l_0) - \lambda\dot{x} - \cancel{mg} + k(\ )$$

$$m\ddot{x} = -k(x - X_A) - \lambda\dot{x} + kx_e$$

$$m\ddot{x} = -k(\underbrace{x - x_e}_{X} - X_A) - \lambda\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -k(X - X_A) - \lambda\dot{x}$$

$\longleftarrow$ $m\ddot{X} + \lambda\dot{X} + kX = kX_A(t)$

méca ressort 9

IV. 1.) Régime transitoire et permanent :

De façon générale l'expression est :

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = E_m \cos(\omega t)}$$

Avec | $E_m = \omega_0^2 X_{Am}$ dans le cas du ressort suspendu excité par le haut.

| $E_m = \frac{F_0}{m}$ dans le cas de l'excitation sur la masse.

La solution de cette équation différentielle est la superposition de l'équation linéaire associée.

(ESSM) $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ (déjà vu en libre) 3 options.

$\Longrightarrow$ donnera $\boxed{X_{homogène}(t)}$ 1

Et de la solution particulière de l'équation. Comme elle est linéaire sa solution est de la forme de son second membre $\boxed{X_p(t)}$

Second membre : $E_m \cos(\omega t)$

↳ $\boxed{X_p = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$ 2

$X(t) = X_{particulière} + X_{homogène}$

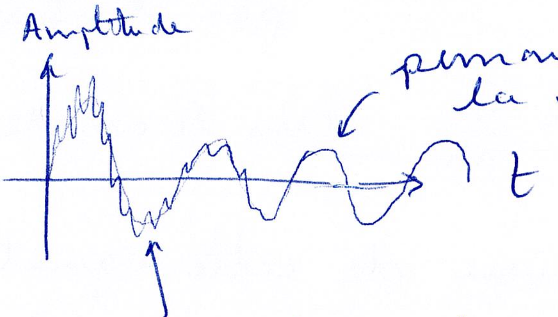
$$= X_m \cos(\omega t + \varphi) + \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega t + B\sin(\omega t)\right) & \Delta < 0 \\ e^{-\omega_0 t}(A + Bt) & \Delta = 0 \\ Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} & \Delta > 0 \end{cases}$$

Tant que X_p et X_h existe alors nous sommes en régime transitoire. La partie X_h va s'éteindre avec le temps. si $t \to +\infty$ $X_h \to 0$

Puis ensuite il ne restera que la partie X_p.

$$X(+\infty) \longrightarrow X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$\Longrightarrow$ Visuellement :
exemple $\omega = \frac{\omega_0}{10}$



permanent "que" la partie sinusoïdale de X particulière
⚠ on connaît pas X_m et φ.

transitoire les 2 morceaux de l'équation

Le système oscille à la fréquence de l'excitateur déphasé de φ.

Combien de temps dure le régime transitoire ?
On étudie la partie X homogène [Exemple]

$\Delta < 0$ $\quad X_h = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ d'où $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{10}{2\pi \cdot 10^{-4}}$

programme python : $Q = 5$
$\omega_0 = 2\pi \cdot 10^4$ rad.s^{-1}

Après $3\tau < 5\%$
(Chaque fois que s'écoule 1τ l'exponentielle est divisé par 2,7)

IV. 2.) Etude du regime permanent :

Suite à l'etude de l'equadiff on a montré que le régime etablit sera de la forme.

$$x(t) = \underbrace{X_m}\cos(\omega t + \underbrace{\varphi})$$ quand t suffisament grand.

Mais on ne connait ni $\boxed{X_m}$ ni $\boxed{\varphi}$

⚠ on a montré que le système va vibrer à la pulsation de l'excitateur (ω). Mais il ne faut pas confondre $E_m \cos(\omega t)$ qui est la source et $X_m \cos(\omega t + \varphi)$ qui est la réponse du système à l'excitation. On remarque qu'il est possible qu'il y ai un déphasage (φ) et une amplitude différente. $X_m \neq E_m$.

La solut : $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est donc à intégrer dans l'équation comme solution.

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = E_m \cos(\omega t)$$ avec $E_m = \omega_0^2 x_A$.

Il faudrait dériver 2 fois $X(t) \to \ddot{X}(t)$
$X(t) \to \dot{X}(t)$ ...

Ici la derivation de fonction sinusoïdale va être très laborieuse on intègre alors la forme complexe

Rappel en meca : $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0 x = E_m \cos(\omega t)$

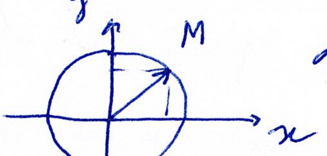
IV.2.1) La notation complexe.

$$s(t) = \underbrace{S_{max}}_{\text{amplitude}} \cos(\underbrace{\underbrace{2\pi f}_{\omega} t + \varphi}_{\text{angle}})$$

φ ↳ phase à l'origine.

Une onde est définie par une amplitude et la fonction cos ou sinus.

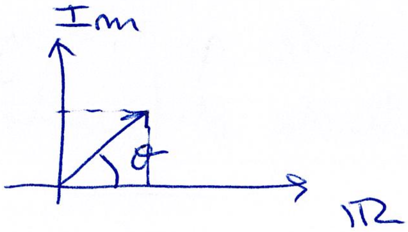
Le vecteur de Fresnel est une autre méthode d'expression d'une onde :



Le rayon du cercle $= \sqrt{x_{\Pi}^2 + y_{\Pi}^2}$ est la norme du vecteur.

$\boxed{\text{C'est la passerelle}}$

Un complexe :



$\mathbb{R} + j\,\mathrm{Im}$
$x + j\,y$

Norme $= \sqrt{\mathrm{Im}^2 + \mathbb{R}^2}$
$=$ Amplitude du vecteur.

$\mathbb{R} = x = \cos\theta$

$\mathrm{Im} = y = \sin\theta$

Donc le complexe peut s'exprimer

$$\boxed{\cos\theta + j\sin\theta}$$

Une onde est un vecteur
Un complexe est un vecteur } Une onde est un complexe

Enfin grâce à la formule d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta + j\sin\theta = e^{i\theta}}$$

IV 2.2) La transmutation en complexe.

$$s(t) = S_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

complexe

$$\underline{s}(t) = S_{max} \left(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi) \right)$$

Euler

$$\underline{S}(t) = S_{max}\, e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{S_{max}\left(e^{j\varphi}\right.}_{\underline{S}_{max}} \left. \cdot\, e^{j\omega t}\right) = \underline{S}_{max}\, e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{S}(t) = \underbrace{S_{max} \cos(\omega t + \varphi)}_{\mathbb{R} = S(t)} + \underbrace{S_{max}\, j \sin(\omega t + \varphi)}_{Im}$$

En conclusion j'utilise un outil $\underline{S}(t)$ qui contient la partie qui nous interesse dans sa forme $\mathbb{R}$.

$$\underline{S}(t) = \underbrace{S_{max} \cos(\omega t + \varphi)}_{S(t)} + \underbrace{S_{max}\, j \sin(\omega t + \varphi)}_{\underline{S}_{max}} = S_{max}\left(e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}\right)$$

$$\underline{S_{max}} \cdot e^{j\omega t}$$

Amplitude complexe

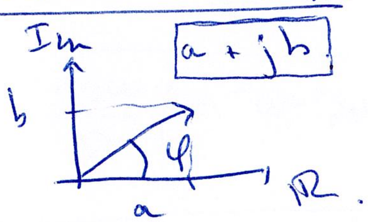
En conclusion au lieu de travailler avec

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = \underbrace{X_m\left(e^{j\varphi}\right.}_{\underline{X}_m} \left. \cdot\, e^{j\omega t}\right)$$

$$\boxed{\underline{X}(t) = \underline{X}_m\, e^{j\omega t}}$$

et dans un deuxième temps on étudiera $\underline{X}_m$

Etude de $\underline{X}_m$:



Module : $|\underline{X}_m| = \sqrt{a^2 + b^2}$ = amplitude

Argument : $\arg(\underline{X}_m) = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \varphi$.

Rappel : $\arg\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\arg(A)}{\arg(B)}$ et $\frac{\arg(A)}{\arg(B)} = \arg(A) - \arg(B)$

$$|X| = \left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{\ldots}$$

Dans le monde complexe l'équadiff devient :

$$\ddot{\underline{X}} + \frac{w_0}{Q}\dot{\underline{X}} + w_0^2 \underline{X} = E_m e^{jwt}$$

$E_m = w_0^2 X_{Am}$. (cf page 4')

X_{Am} = amplitude de l'excitateur.

La solution de l'équation proposé en complexe : $\underline{X}(t) = \underline{X_m} e^{jwt}$

$\dot{\underline{X}} = \underline{X_m} jw e^{jwt}$.

$\ddot{\underline{X}} = \underline{X_m} (jw)^2 e^{jwt} = -w^2 \underline{X_m} e^{jwt}$

$\underline{X} = \underline{X_m} e^{jwt}$.

calcul + facile en complexe des dérivée pour réinjecter dans l'équadiff

$$-\underline{X_m} w^2 \cancel{e^{jwt}} + \frac{w_0}{Q} \underline{X_m} jw \cancel{e^{jwt}} + w_0^2 \underline{X_m} \cancel{e^{jwt}} = E_m \cancel{e^{jwt}}$$

$$\underline{X_m}\left(-w^2 + \frac{w_0}{Q} jw + w_0^2\right) = E_m.$$

$$\boxed{\underline{X_m} = \frac{E_m}{\underbrace{w_0^2 - w^2 + j\frac{w_0 w}{Q}}_{a + jb.}}}$$

$$\rightarrow |\underline{X_m}| = \frac{E_m}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \left(\frac{w_0 w}{Q}\right)^2}}$$

$$\rightarrow \arg(\underline{X_m}) = -\arctan\left(\frac{\frac{w_0 w}{Q}}{w_0^2 - w^2}\right)$$

Et on a dit avant que

$$\left.\begin{aligned} \underline{X_m} &= X_m e^{j\varphi}. \\ \underline{X} &= X_m e^{j(wt+\varphi)} \end{aligned}\right\} \quad X_m e^{j\varphi} = \frac{\overbrace{E_m}^{w_0^2 X_{Am}.}}{w_0^2 - w^2 + j\frac{w_0 w}{Q}}$$

méca
renat
8

IV 2.3 : Interpretation de l'expression

$$\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_{Am}}{\underbrace{(\omega_0^2 - \omega^2)}_{\text{résistance élastique}} + \underbrace{j\frac{\omega_0 \omega}{Q}}_{\text{résistance frottements}}}$$

× Si $\omega_0 \gg \omega$ $(\omega \to 0)$ quasiment plus d'excitation par l'excitateur.

× $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi} \simeq X_{Am}$ la masse oscille avec la même amplitude que l'excitateur sans déphasage

× $\varphi = 0$

× Si $\omega_0 \ll \omega$ $(\omega \to +\infty)$ excitation très rapide.

× $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi} \simeq -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} X_{Am} \Rightarrow X_m = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} X_{Am} \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} 0$

× $\varphi = \pi$

Les oscillations sont de faible amplitude et en opposition de phase par rapport à l'excitateur.

× Si $\omega = \omega_0$ Cas particulier : RESONANCE

$$\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi} = Q\frac{X_{Am}}{j}$$

× $X_m = Q X_{Am}$. Si $Q > 1$ les oscillations ont une plus grande amplitude.

× $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

Le point M oscille en quadrature de phase par rapport à A.

Suite et fin document prepa ATS.

Lycée le Dantec